

# ***Enjeux & Maîtrise de la Simulation Numérique en Mécanique des Fluides***

***Cours 3 : Convergence, etc...***

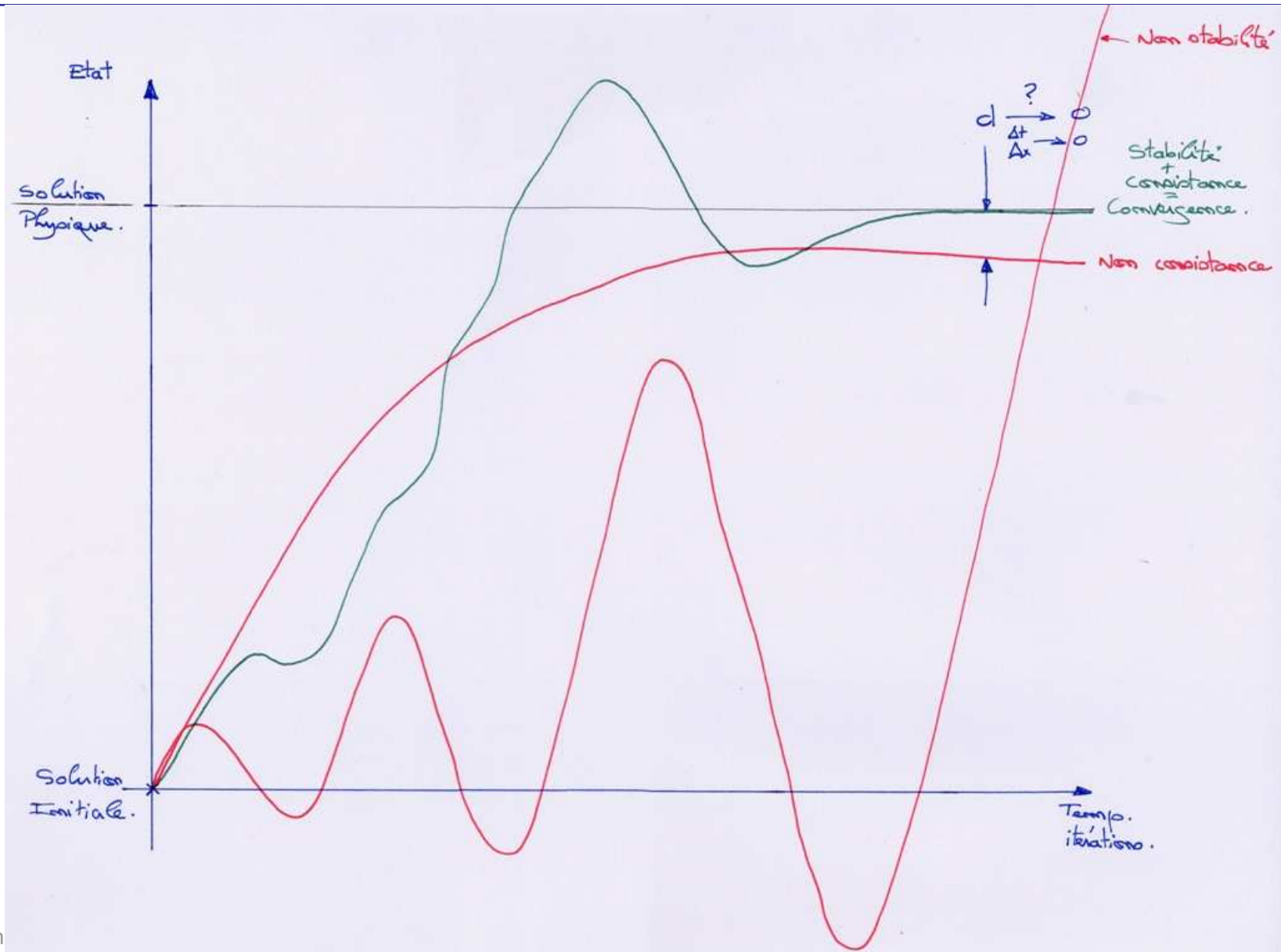
***V.G. Chapin***

# Plan

---

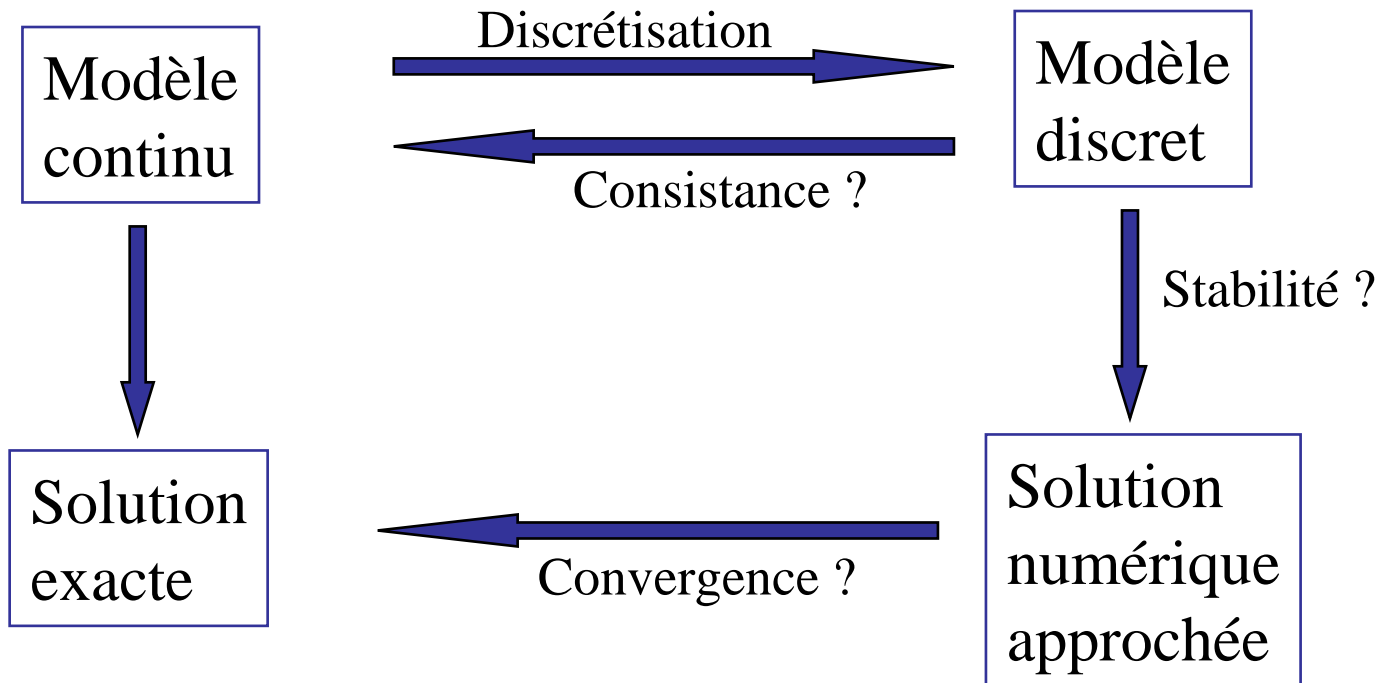
- Objectif : Choix et propriétés des schémas
- Consistance
- Stabilité
  - Exemples
  - Critère de stabilité et nombre CFL
- Convergence
- Dissipation et dispersion des schémas
- Schémas usuels & schémas d'ordre élevés

# Convergence



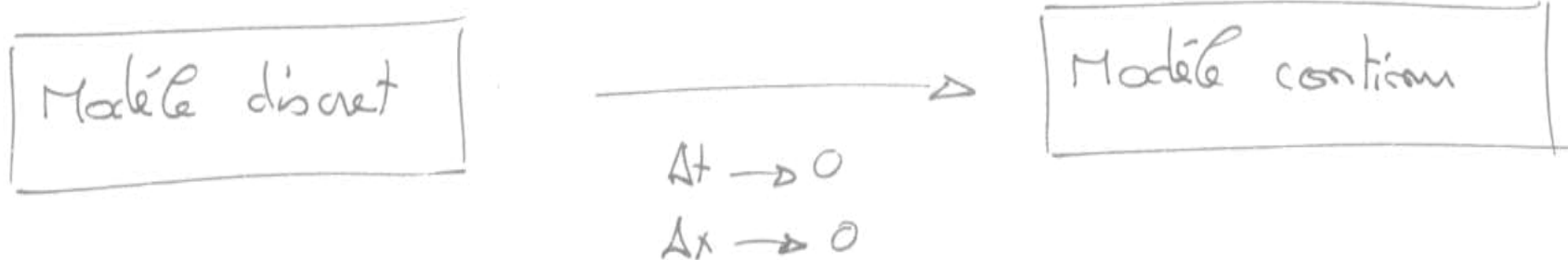
# Convergence...

---



# Consistance

- Définition : un modèle discret est consistant avec le modèle continu qu'il représente s'il tend vers celui-ci lorsque les pas de temps et d'espace tendent vers zéro.



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0 \quad \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{\Delta t \rightarrow 0} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

# Consistance

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} = 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i + \dots$$

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \dots$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \dots$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i + a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = - \frac{\Delta t}{2!} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i - \frac{\Delta x^2}{3!} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i$$



# Consistance

2 cas :

$$\text{I} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad / \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = C \quad \Rightarrow \quad O(1)$$

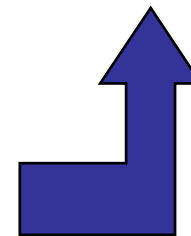
$$\text{II} \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad / \quad \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = C \quad \Rightarrow \quad O(2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i + a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = - \frac{\Delta t}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i - \frac{\Delta x^2}{3!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$



$$- C \Delta x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i - \frac{\Delta x^2}{3!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$

$$- C \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i - \frac{\Delta x^2}{3!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$



# Consistance

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i + a \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = - \frac{\Delta t}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i - \frac{\Delta x^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$

$$\downarrow$$

$$- \frac{\Delta t}{2} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i$$

terme visqueux  
de signe  $< 0$  !

→ schéma instable.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 0 & \text{dérivée / t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{— / x} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$



# La consistance ne suffit pas...

$$u_t + a u_x = 0$$

~~$$\boxed{1} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$~~

Euler explicite, 2<sup>nd</sup> ordre centre  
 $\Delta t$   $\Delta x^2$

$$\boxed{2} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

Euler implicite, 2<sup>nd</sup> ordre centre  
 $\Delta t$   $\Delta x^2$

$$\boxed{3} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0$$

Euler explicite, 1<sup>er</sup> ordre upwind  
 $\Delta t$

$$\boxed{4} \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

Euler implicite, 1<sup>er</sup> ordre upwind  
 $\Delta t$

[1], [3] : Schémas explicites

$$[1] \rightarrow {}^{m+1}u_i = {}^m u_i - \frac{\sigma}{2} ({}^m u_{i+1} - {}^m u_{i-1}) \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$[3] \rightarrow {}^{m+1}u_i = {}^m u_i - \frac{\sigma}{2} ({}^m u_{i+1} - {}^m u_i) \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

[2], [4] : Schémas implicites

$$[2] \quad \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & \diagdown & \\ & & \diagup \\ & & & \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{m+1}u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^m u_i \end{bmatrix}$$

-σ/2    1    σ/2

$$\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

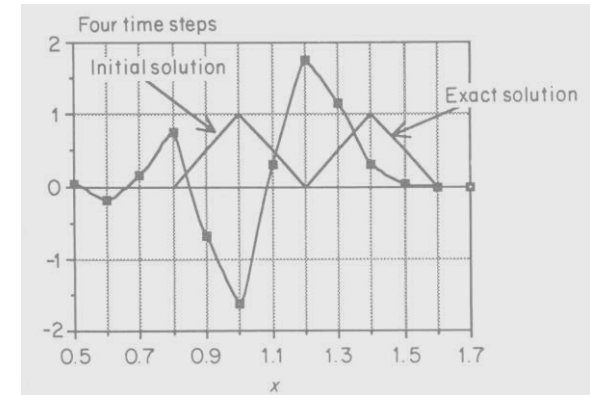
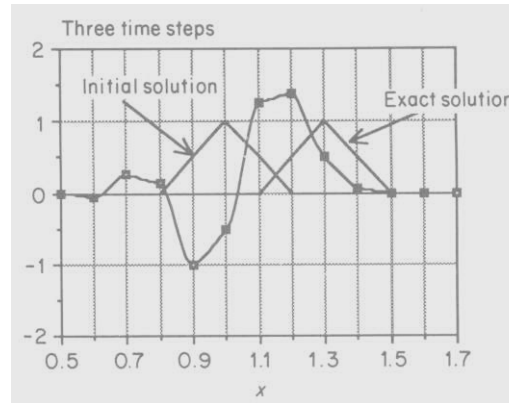
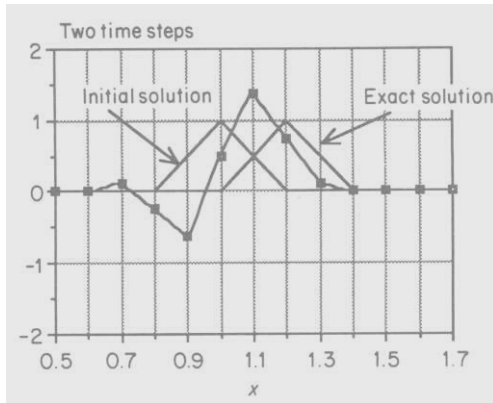
$$[4] \quad \begin{bmatrix} \diagup & & \\ & \diagdown & \\ & & \diagup \\ & & & \diagdown \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{m+1}u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^m u_i \end{bmatrix}$$

0    1-σ    σ

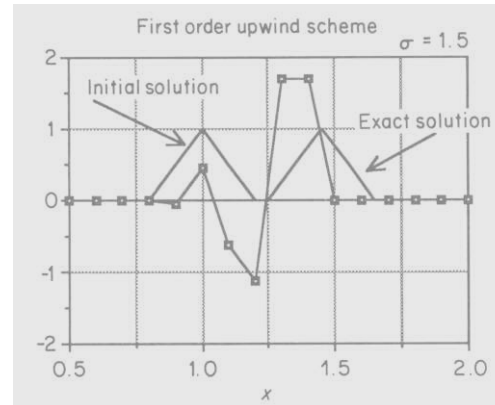
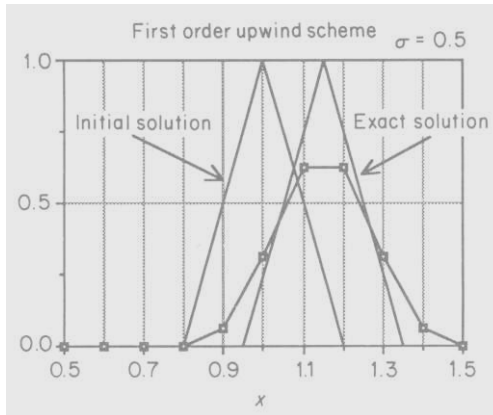
$$\sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

# La consistance ne suffit pas...

1



3

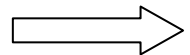


Critère de choix  
du pas de temps ?

Exemple sur l'équation de convection 1D : [Applet](#)

# Stabilité

---

- Définition : un modèle discret est stable s'il n'amplifie pas les perturbations (erreurs de troncature, etc...).
- Condition de stabilité :
  - Soit  ${}^n\varepsilon_i = {}^nu_i - ({}^nu_i)_{\text{ex}}$  l'écart à la solution exacte au temps  $t = n.\Delta t$  au point  $x = i.\Delta x$
  - $\lim |{}^n\varepsilon_i| \leq K$  lorsque  $n$  tend vers l'infini et  $\Delta t$  vers 0 à  $t$  fixé
- Condition de stabilité plus générale (Richtmyer, 1956) 

# Stabilité

schéma explicite :  ${}^{m+1}u = C \cdot {}^m u$

$$\rightarrow {}^m u = (C)^m \cdot {}^0 u$$

— implicite :  $B \cdot {}^{m+1}u = {}^m u$

$$C = B^{-1}$$

$$\rightarrow {}^m u = (C)^m \cdot {}^0 u$$

exemple schéma explicite :  ${}^{m+1}u_i = {}^m u_i - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} ({}^m u_{i+1} - {}^m u_{i-1})$

— — implicite :  ${}^{m+1}u_i = {}^m u_i - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} ({}^{m+1}u_{i+1} - {}^{m+1}u_{i-1})$

condition de stabilité :  $\|C^m\| \leq K \quad \forall n$

$${}^m u = \begin{pmatrix} {}^m u_1 \\ {}^m u_2 \\ \vdots \\ {}^m u_i \\ \vdots \\ {}^m u_N \end{pmatrix}$$

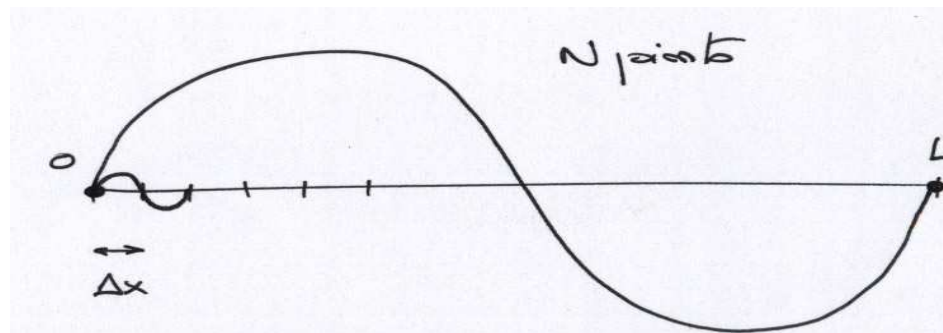
# Stabilité : Euler-STD2

- Exemple :

- **Modèle continu** : eq. convection pure 1D linéaire
- **Modèle discret** : spatial centré  $O(\Delta x^2)$  et Euler explicite  $O(\Delta t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

- Je cherche des solutions sous la forme de modes normaux :



$$u(x, t) = \hat{u} e^{i(kx - \omega t)}$$

$$k_{\min} = \frac{2\pi}{L}$$
$$k_{\max} = \pi / \Delta x$$

$$k_{\min} \cdot \Delta x = 2\pi / N$$
$$k_{\max} \cdot \Delta x = \pi$$

# Stabilité : Euler-STD2

## Solution exacte

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik u$$

$$-i\omega u + aik u = 0$$

$$(ak - \omega) u = 0$$

$$a = \frac{\omega}{k}$$

## Solution numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{e^{-i\omega \Delta t} - 1}{\Delta t} \cdot u_i^n$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x} \cdot u_i^n = \frac{i \sin(k\Delta x)}{\Delta x} u_i^n$$

$$\left( \frac{e^{-i\omega \Delta t} - 1}{\Delta t} + ai \frac{\sin(k\Delta x)}{\Delta x} \right) u_i^n = 0$$

Relation de dispersion



## Stabilité : Euler-STD2

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad {}^{m+1}u_i = {}^m u_i - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} ({}^m u_{i+1} - {}^m u_{i-1})$$

$$g = \frac{{}^{m+1}u_i}{{}^m u_i} = 1 - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (e^{i k \Delta x} - e^{-i k \Delta x})$$

$$= 1 - \frac{a \Delta t}{\Delta x} i \sin(k \Delta x)$$

- Critère de stabilité :  $\|g\| \leq 1$

$$\|g\| = \sqrt{1 + \sigma^2 \sin^2(k \Delta x)} \geq 1 \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\forall \sigma \text{ et } \forall k \Delta x$$

le modèle discret est donc bien instable  
quelquesoit  $\sigma$ .



## Un schéma d'ordre 2 centré stable

- Schéma proposé par Lax-Wendroff en 1960 :

$$^{n+1}u_i = ^nu_i + \Delta t (u_t)_i + \frac{\Delta t^2}{2} (u_{tt})_i + O(\Delta t^3)$$

$$^{n+1}u_i = ^nu_i - a\Delta t (u_x)_i + \underbrace{\frac{a^2 \Delta t^2}{2} (u_{xx})_i}_{\text{terme dissipatif}} + O(\Delta t^3)$$

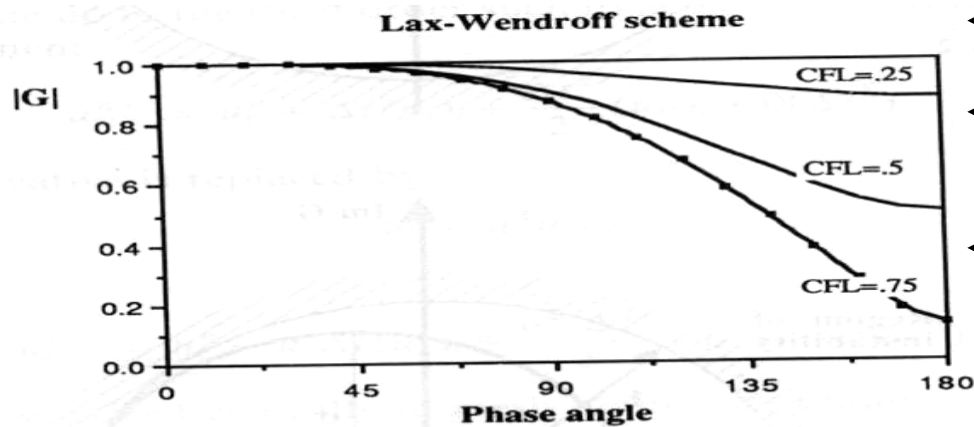
$$^{n+1}u_i = ^nu_i - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (^nu_{i+1} - ^nu_{i-1}) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (^nu_{i+1} - 2^nu_i + ^nu_{i-1})$$

$$^{n+1}u_i = ^nu_i - \frac{\sigma}{2} (^nu_{i+1} - ^nu_{i-1}) + \frac{\sigma^2}{2} (^nu_{i+1} - 2^nu_i + ^nu_{i-1})$$

Stable pour  $\sigma \leq 1$

# Un schéma d'ordre 2 centré stable

- Schéma proposé par Lax-Wendroff en 1960 :

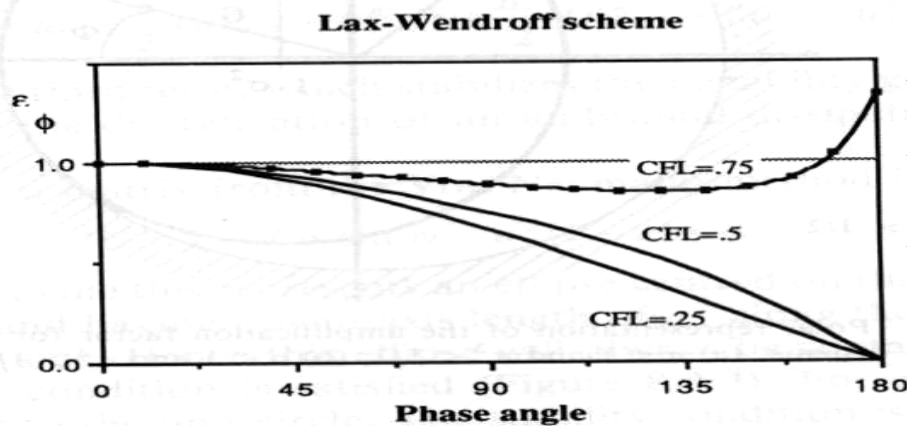


← instable

← Précis mais proche de l'instabilité

← Robuste mais imprécis

- Compromis précision / robustesse



← Vitesse  $> a$

← Vitesse  $= a$

← Vitesse  $< a$

- Compromis amplitude / vitesse

## Stabilité : Euler-Upwind

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$\begin{aligned} g = \frac{u_i^{n+1}}{u_i^n} &= 1 - \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left( 1 - e^{-ik \Delta x} \right) = 1 - \sigma - \sigma (\cos(k \Delta x) - i \sin(k \Delta x)) \\ &= (1 - \sigma) - \sigma \cos(k \Delta x) + i \sigma \sin(k \Delta x) \end{aligned}$$

$$\|g\| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{a \Delta t}{\Delta x} \leq 1} \quad \text{Critère CFL}$$

## Extension du critère CFL

---

- Tous les schémas appliqués à des équations de convection (équations hyperboliques en temps) ont une limite CFL qui s'écrit :

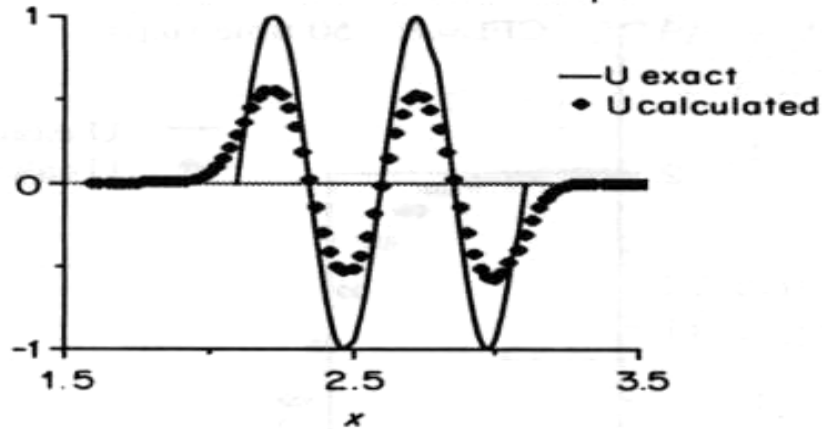
$$\Delta t \leq \text{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{a}$$

- Euler-Upwind : CFL = 1
- Lax-Wendroff : CFL = 1
- RK25-STD2 : CFL = 4 (BE3)
- Etc...

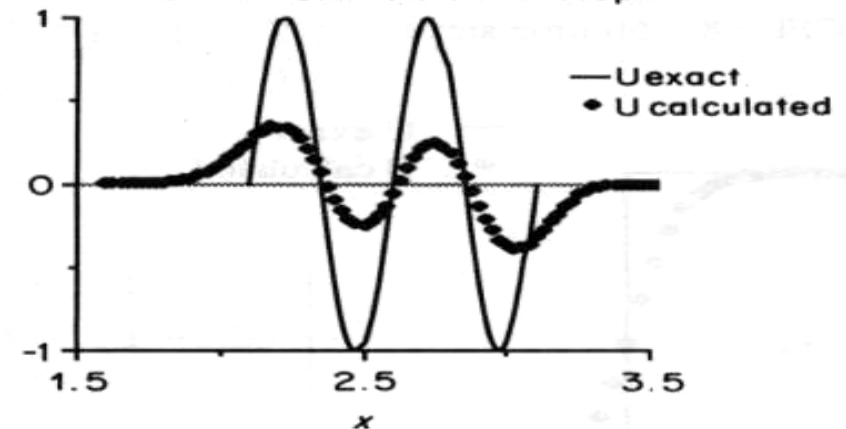
## Exemples : onde sinusoïdale $\lambda$

$\Delta x$

(a) First order upwind scheme  
CFL = 0.8 80 time steps



(b) Lax - Friedrichs scheme  
CFL = 0.8 80 time steps



*La consistance et la stabilité, c'est bien :*

*Le code ne plante plus !!!*

*Mais ça ne suffit pas visiblement...*

*???*

$\Delta x^2$

(c)

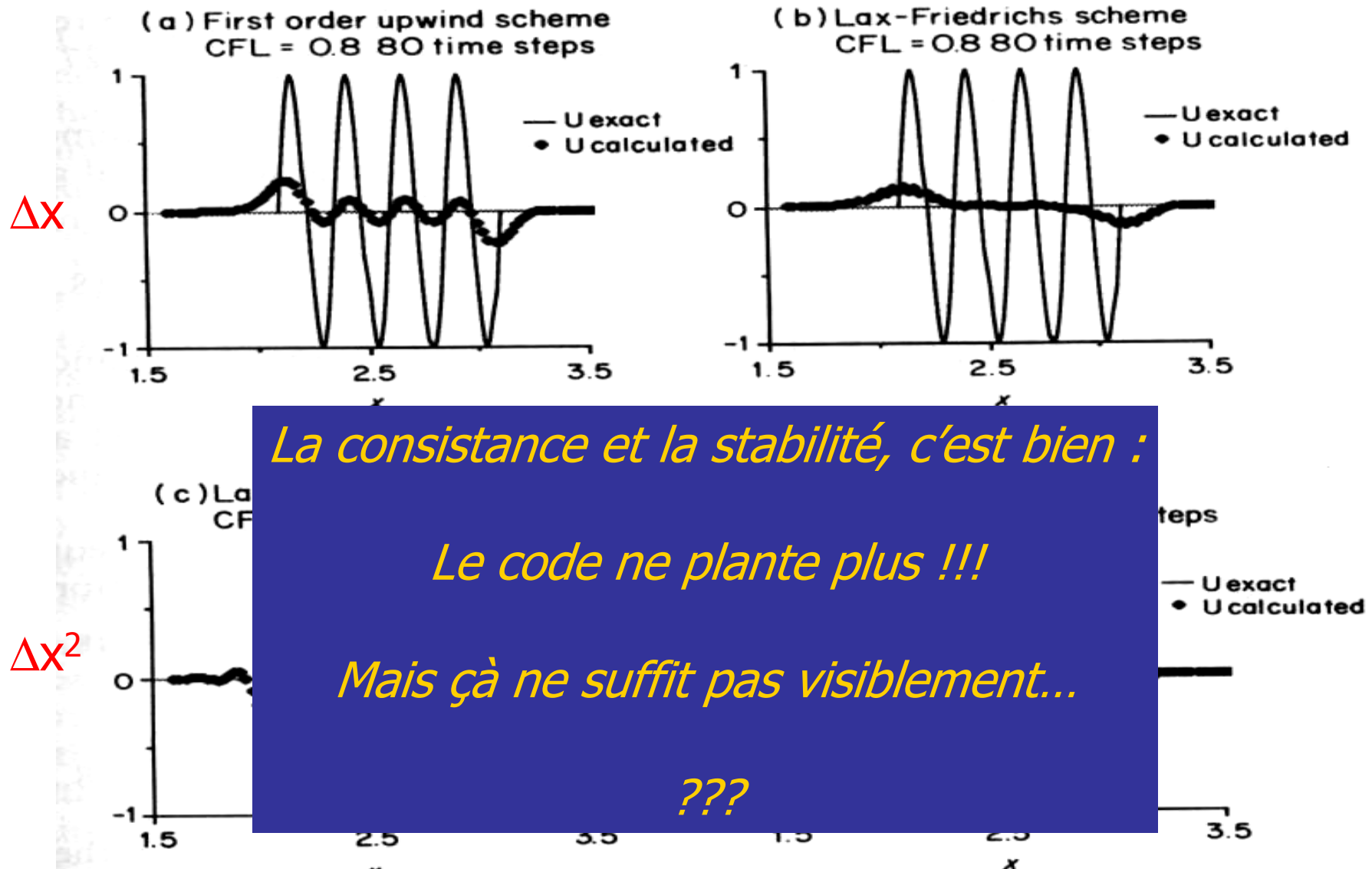


e  
e steps

— U exact  
• U calculated



## Exemples : onde sinusoïdale $\lambda/2$



# Erreurs de discrétisation

---

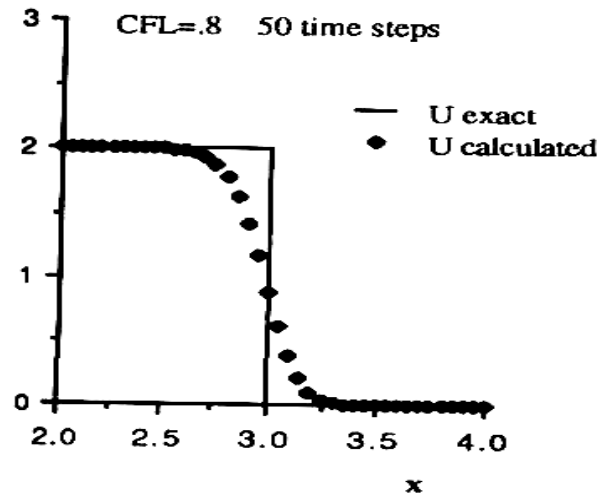
- Deux types d'erreurs introduisent par la discrétisation d'un modèle continu avec un schéma numérique :
  - La dissipation
  - La dispersion

Convection 1D d'une onde simple : [Applet](#)

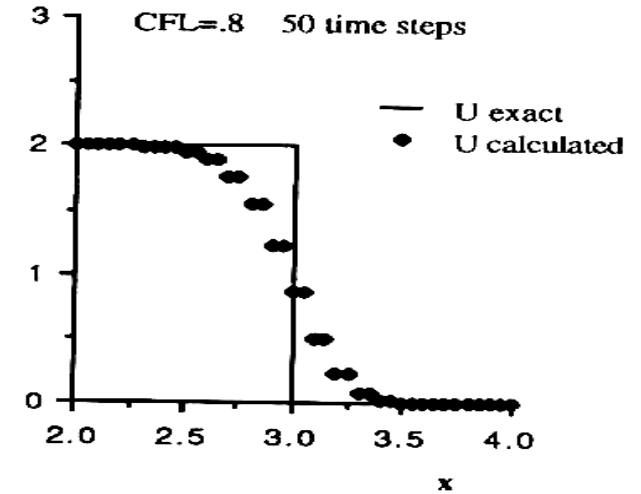
Convection 1D d'un paquet d'onde : [Applet](#)

# Exemples : discontinuité

Dissipation

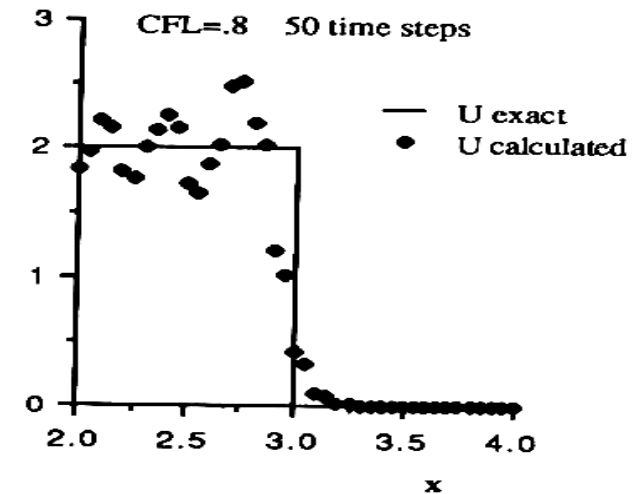
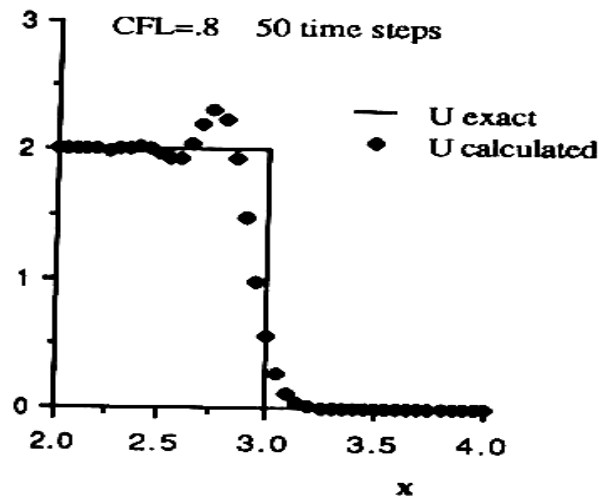


(c) Lax-Wendroff scheme



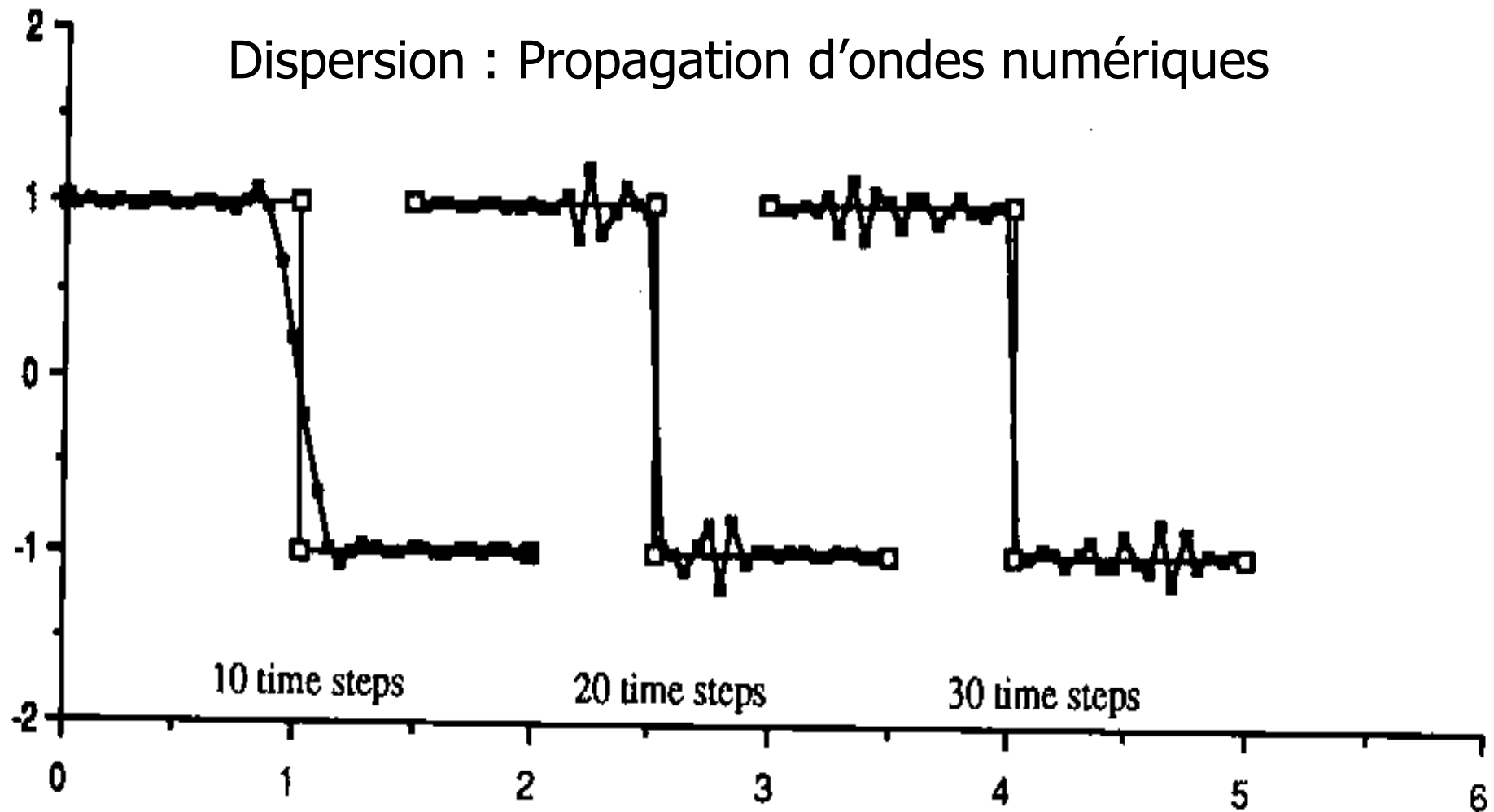
(d) Leap-frog scheme

Dispersion





## Exemple : discontinuité



# Stabilité diffusion pure

---

- Voir Hirsch Tome 1 (1988), p303 : Error Analysis for parabolic problems

# Stabilité équation de convection-diffusion

---

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Critère diffusif :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$$

Critère convectif,  
CFL modifié :

$$\frac{a \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{2D}{a \cdot \Delta x} \leq 1$$

- Hirsch Tome 1 (1988), p336, p403
- C. Cossu JCP 144 (1998), p98-108

# Résumé stabilité convection, diffusion

1 Convection pure :  $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

critère de stabilité = critère CFL :

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sigma_i}{\omega_m'}$$

$\propto$  schéma temporel

$\propto$  schéma spatial

2 Diffusion pure :  $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

critère de stabilité :

$$D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{\sigma_n}{\omega_m''}$$

$\propto$  schéma temporel

$\propto$  schéma spatial

# Convergence : Théorème de Lax

---

$$\boxed{\text{Consistance}} + \boxed{\text{Stabilité}} = \boxed{\text{Convergence}}$$

Lorsque j'ai discrétisé un modèle continu de manière **consistante**, la **stabilité** de ce modèle discret est une **condition nécessaire et suffisante de convergence** de la solution numérique vers la solution exacte.

Hypothèses : problème aux valeurs initiales **linéaire**

# Erreur de convergence

---

- Soit un modèle discret convergent (consistant et stable) du modèle continu ci-dessous. Pour un pas d'espace et de temps fixé :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Quelle est l'écart entre la solution numérique et la solution exacte ?
- Quelle est la nature de cet écart (nature physique) ?
- Recherche de solutions sous la forme d'ondes :

$$u(x, t) = \hat{u} e^{i(kx - \omega t)}$$

# Dissipation & dispersion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u \quad \frac{\partial u}{\partial x} = ik u \quad \Rightarrow \boxed{\omega = ck} \quad \text{relation de dispersion.}$$

Si le schéma temporel donne  $\omega_{fd} = \omega_R + i\omega_I \neq \omega$   
 — — — spatial —  $k_{fd} = k_R + ik_I \neq k$

Alors  $u(x, t) = \hat{u} e^{i(k_R + ik_I)x - (\omega_R + i\omega_I)t}$

Et	$k_R \neq k$	$\Rightarrow$	erreur dispersive	du schéma spatial		
	$k_I \neq 0$	$\Rightarrow$	—	dissipative	—	—
	$\omega_R = \omega$	$\Rightarrow$	—	dispersive	—	temporel
	$\omega_I \neq 0$	$\Rightarrow$	—	dissipative	—	—

## Dissipation & dispersion : Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{\Delta t} \cdot (e^{-i\omega \Delta t} - 1) \equiv -i\omega_{fd} \cdot u$$

dev. limité de  $e^{-i\omega \Delta t}$  donne :

$$\omega_{fd} = \omega - i \underbrace{\frac{\omega^2}{2!} \Delta t}_{\text{Dissipation}} - \underbrace{\frac{\omega^3}{3!} \Delta t^2}_{\text{Dispersion}} + \dots$$

Dissipation  
 $O(\Delta t)$

Dispersion  
 $O(\Delta t^2)$



## Dissipation & dispersion : Upwind ordre 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} = \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{\Delta x} \cdot (e^{ik\Delta x} - 1) \equiv i \cdot k_{fd} \cdot u$$

dér. limite de  $e^{ik\Delta x}$  donne :

$$k_{fd} = k + \underbrace{i \frac{k^2}{2!} \Delta x}_{\text{Dissipation } O(\Delta x)} - \underbrace{\frac{k^3}{3!} \Delta x^2}_{\text{Dispersion } O(\Delta x^2)} + \dots$$

## Dissipation & dispersion : Centré ordre 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{2\Delta x} \cdot (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) \\ &= \frac{2i \sin(k\Delta x)}{2\Delta x} \equiv i k_{fd} \cdot u\end{aligned}$$

dév. limité de  $\sin(k\Delta x)$  donne :

$$k_{fd} = k - \underbrace{\frac{k^3}{3!} \Delta x^2 + \frac{k^5}{5!} \Delta x^4 + \dots}$$

Dispersion  
 $O(\Delta x^2)$

# Dissipation & dispersion : Euler-Upwind

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



$$^{n+1}u_i = ^nu_i - \frac{c \Delta t}{\Delta x} ({}^nu_i - {}^nu_{i-1})$$

Solution exacte

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \forall k$$

$$g = \frac{{}^nu_i}{{}^nu_i} = e^{-i\omega \Delta t} = e^{-i(\omega_R + i\omega_i)\Delta t}$$

$$g = e^{-i\omega_R \Delta t} \cdot e^{\omega_i \Delta t} = \eta_e e^{i\phi_e}$$

$$\begin{cases} \eta_e = e^{\omega_i \Delta t} = 1 & (\omega_i = 0) \\ \phi_e = -\omega_R \Delta t = -c \cdot k \cdot \Delta t = -k \Delta x \cdot \tau \end{cases}$$

$$c_e = \frac{-\phi_e}{k \Delta t}$$

Solution numérique.

$$g = \frac{(1-\tau) - \tau \cos(k \Delta x)}{a} + i \frac{\tau \sin(k \Delta x)}{b} = \eta e^{i\phi}$$

$$\eta = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dissipation (variation amplitude)

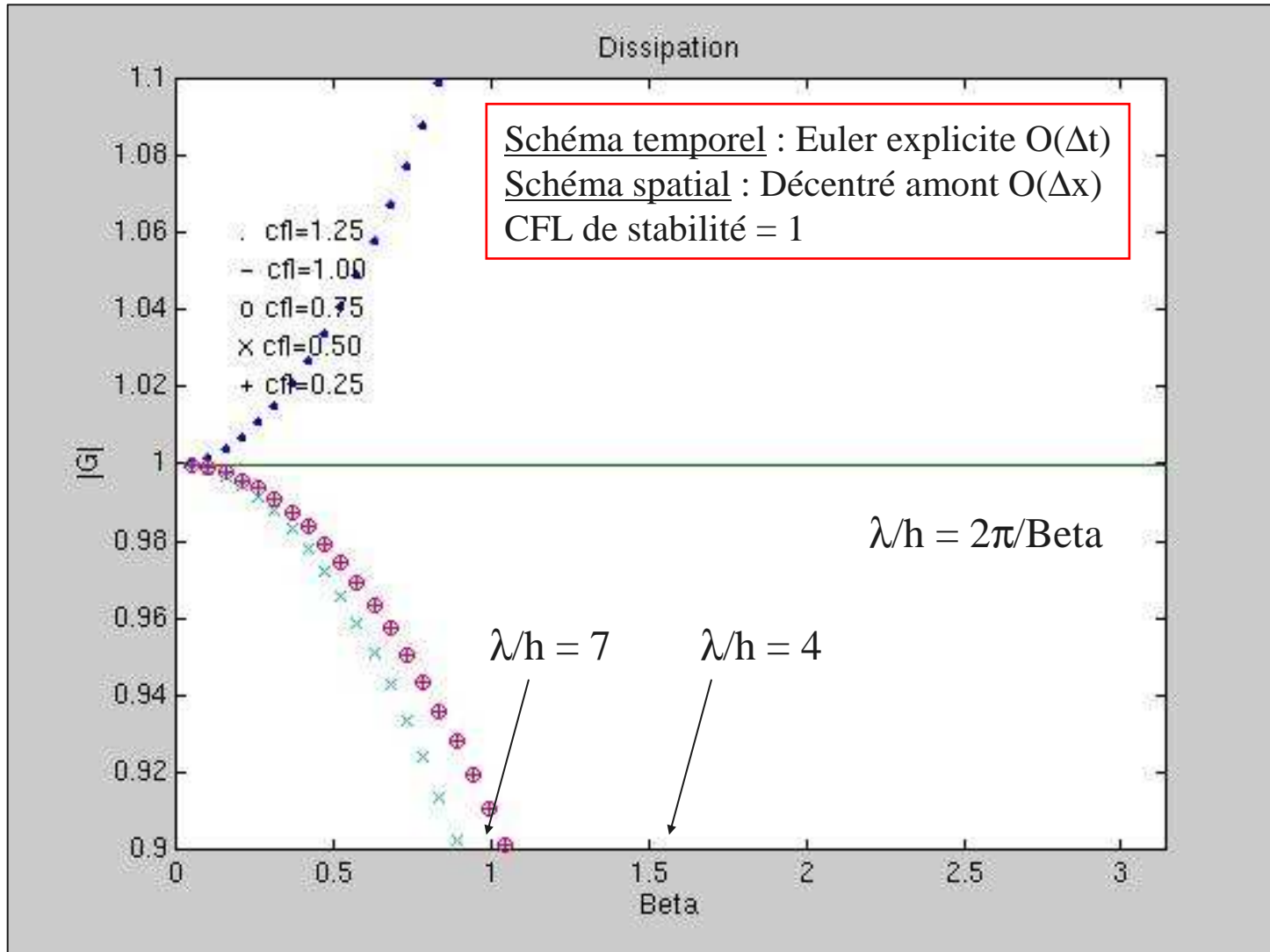
$$\phi = \text{Arg}(g) = \text{Arg}(b/a)$$

dispersion ( — phase)

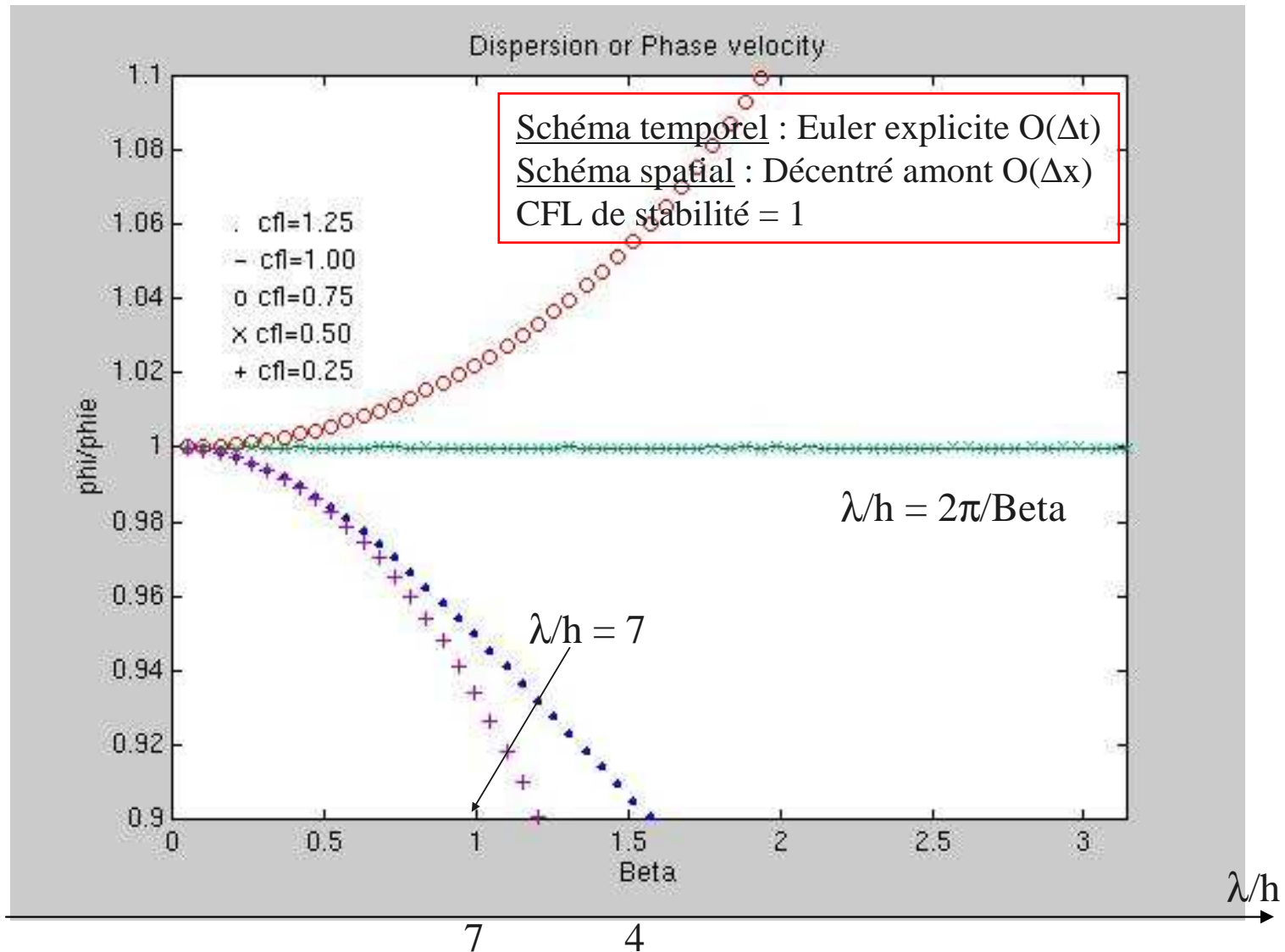
$$c = \frac{-\phi}{k \Delta t}$$

$$\frac{\phi}{\phi_e} = \frac{c}{c_e}$$

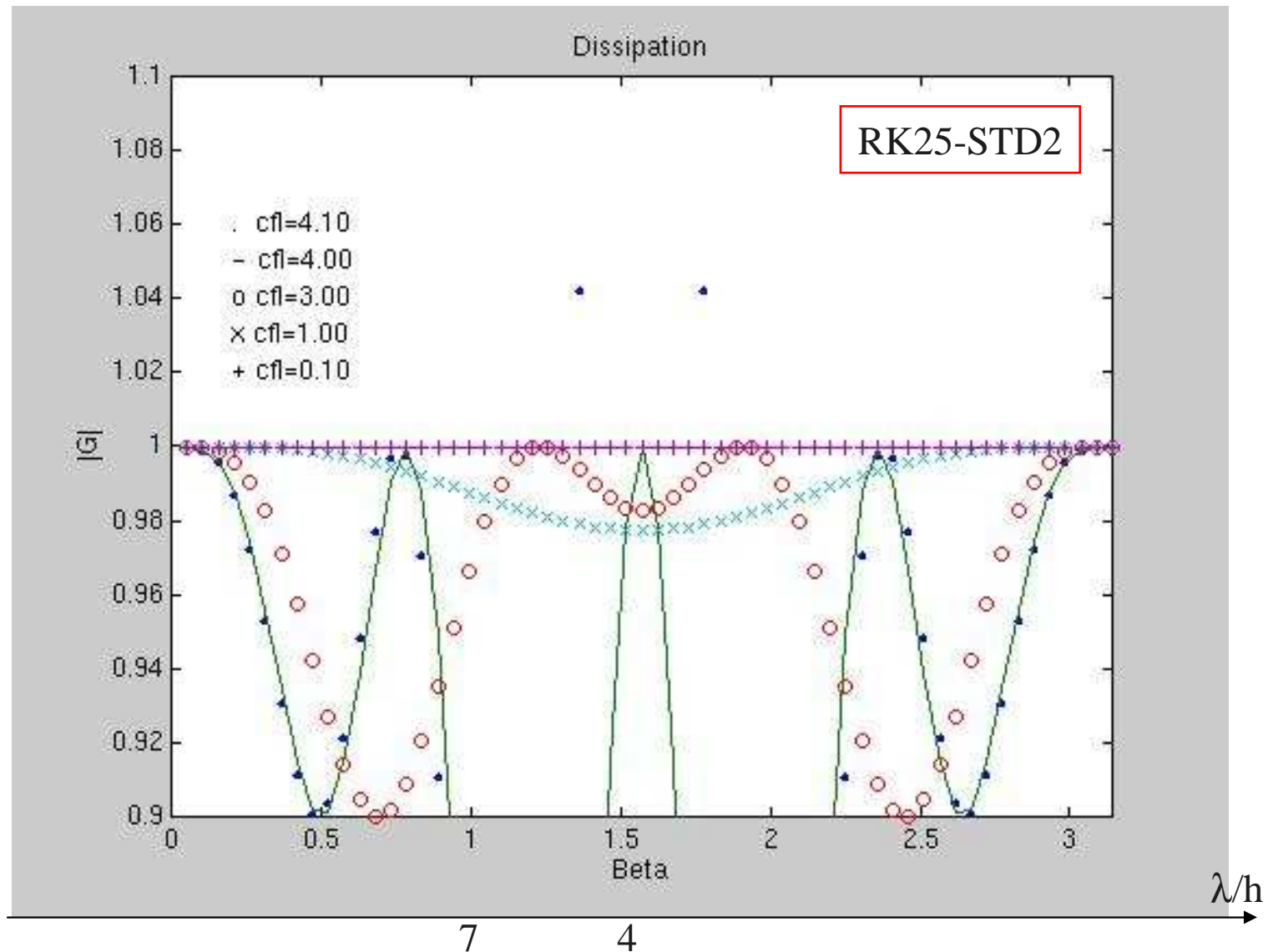
# Dissipation : Euler-Upwind



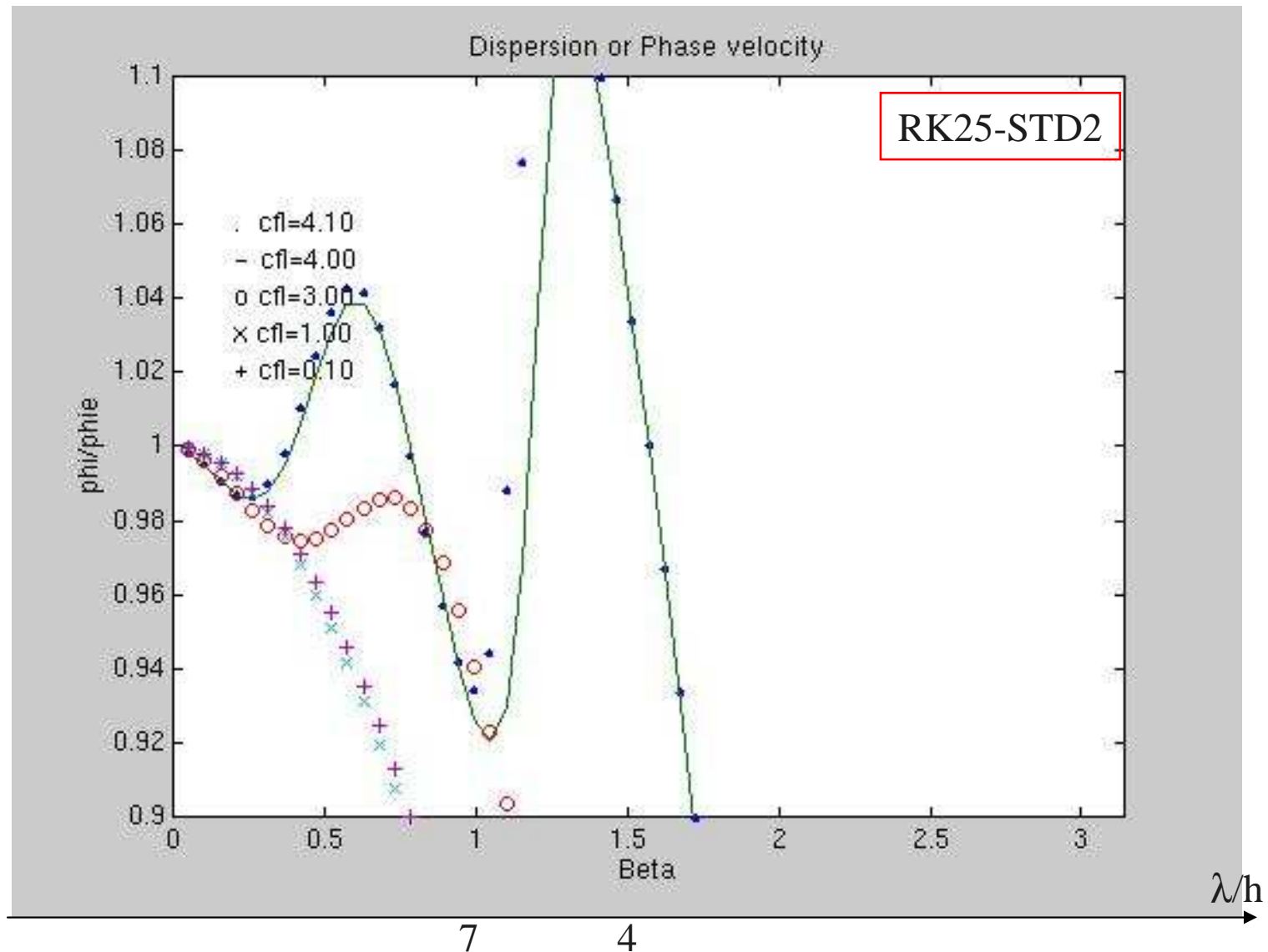
# Dispersion : Euler-Upwind



## Dissipation : RK25-STD2

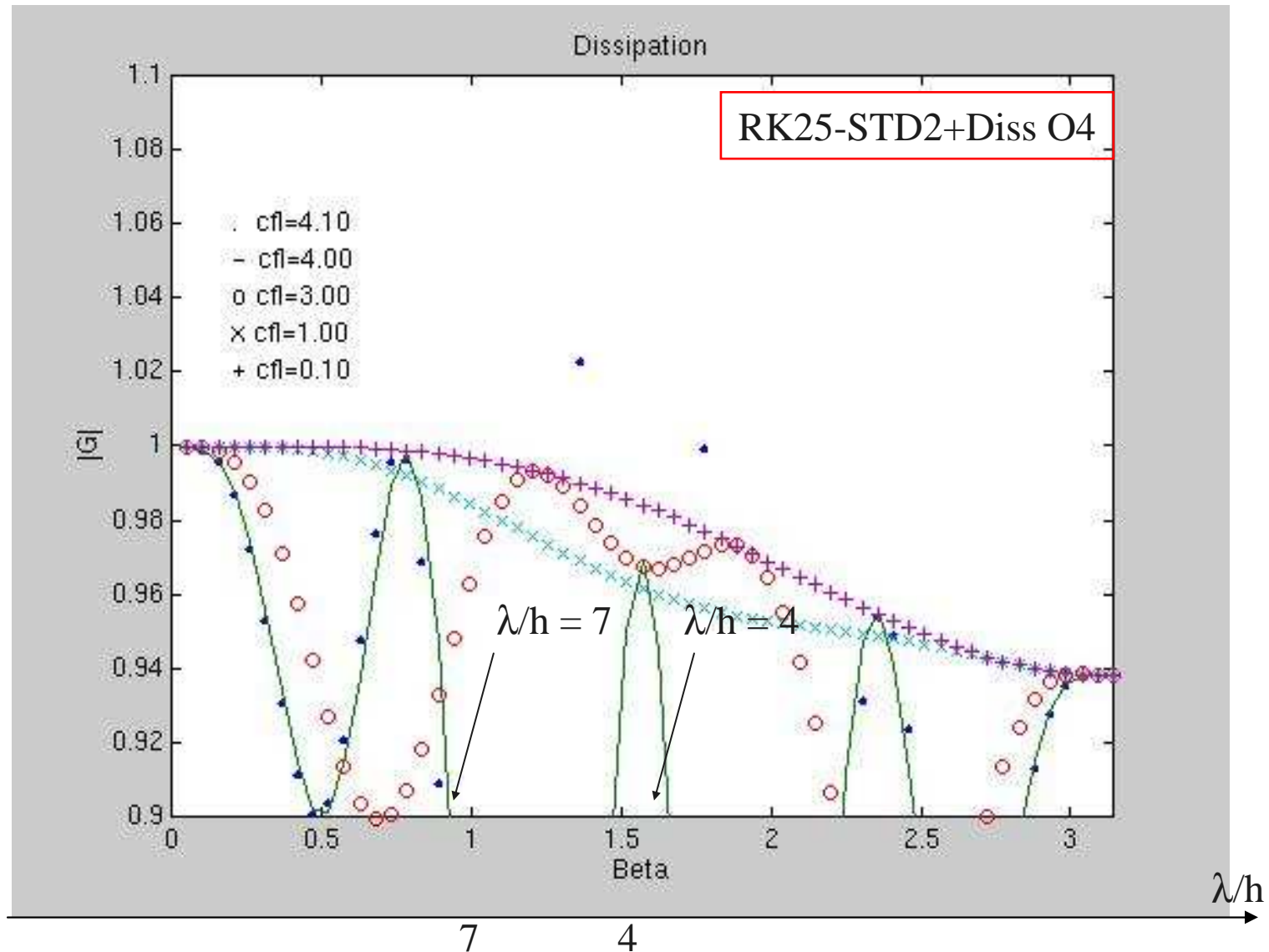


# Dispersion : RK25-STD2



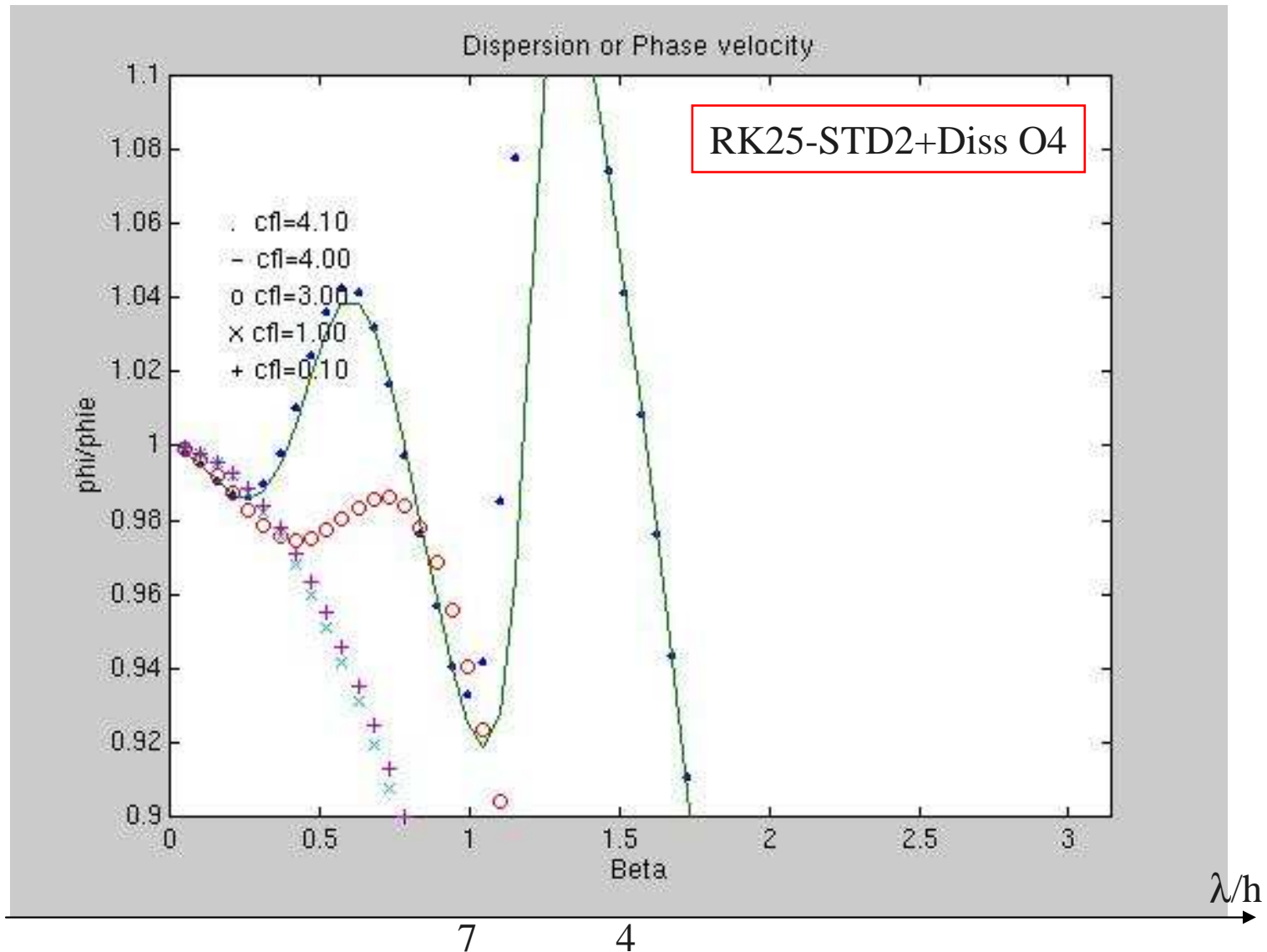


# Dissipation : RK25-STD2+Diss O4

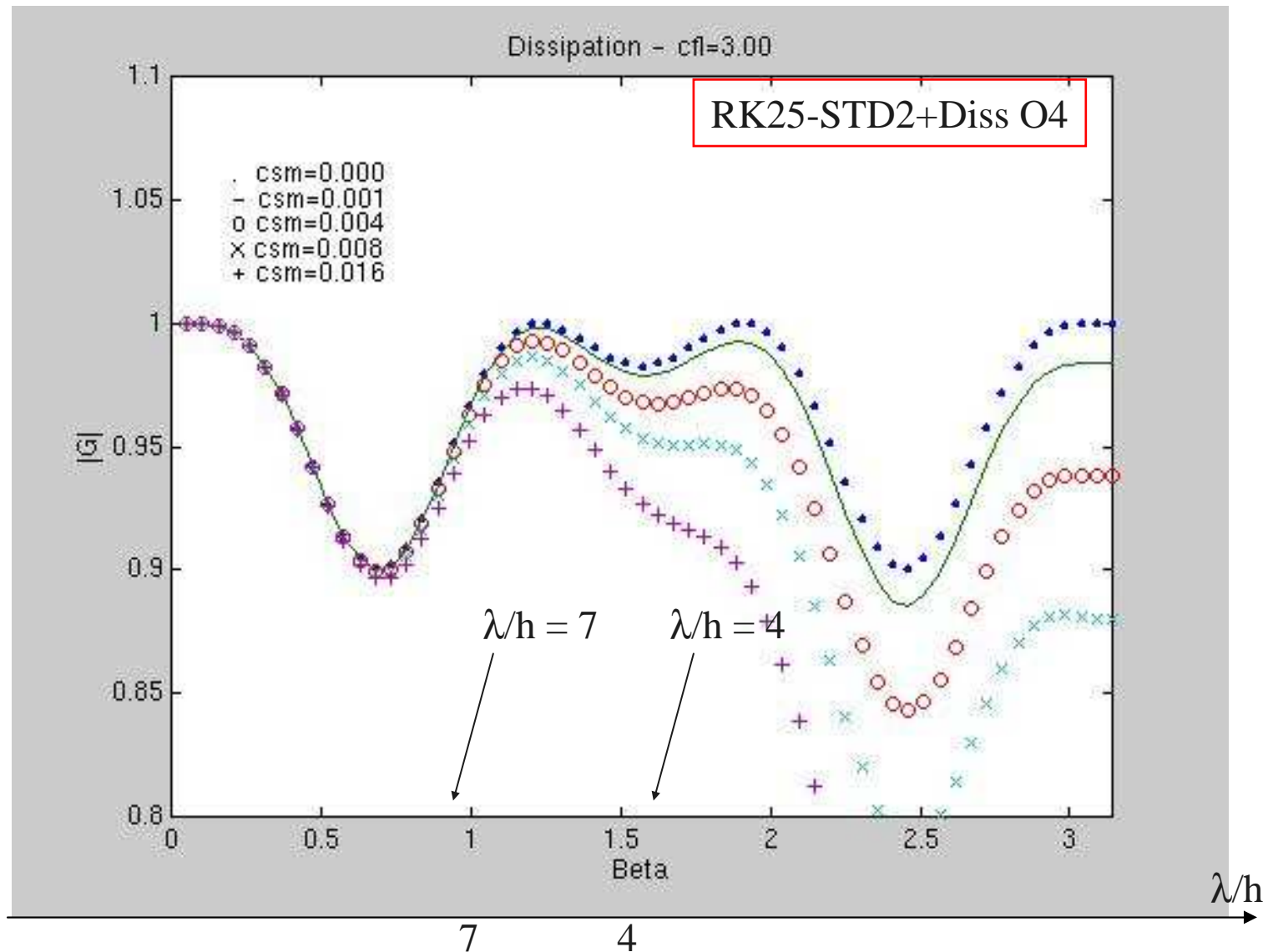




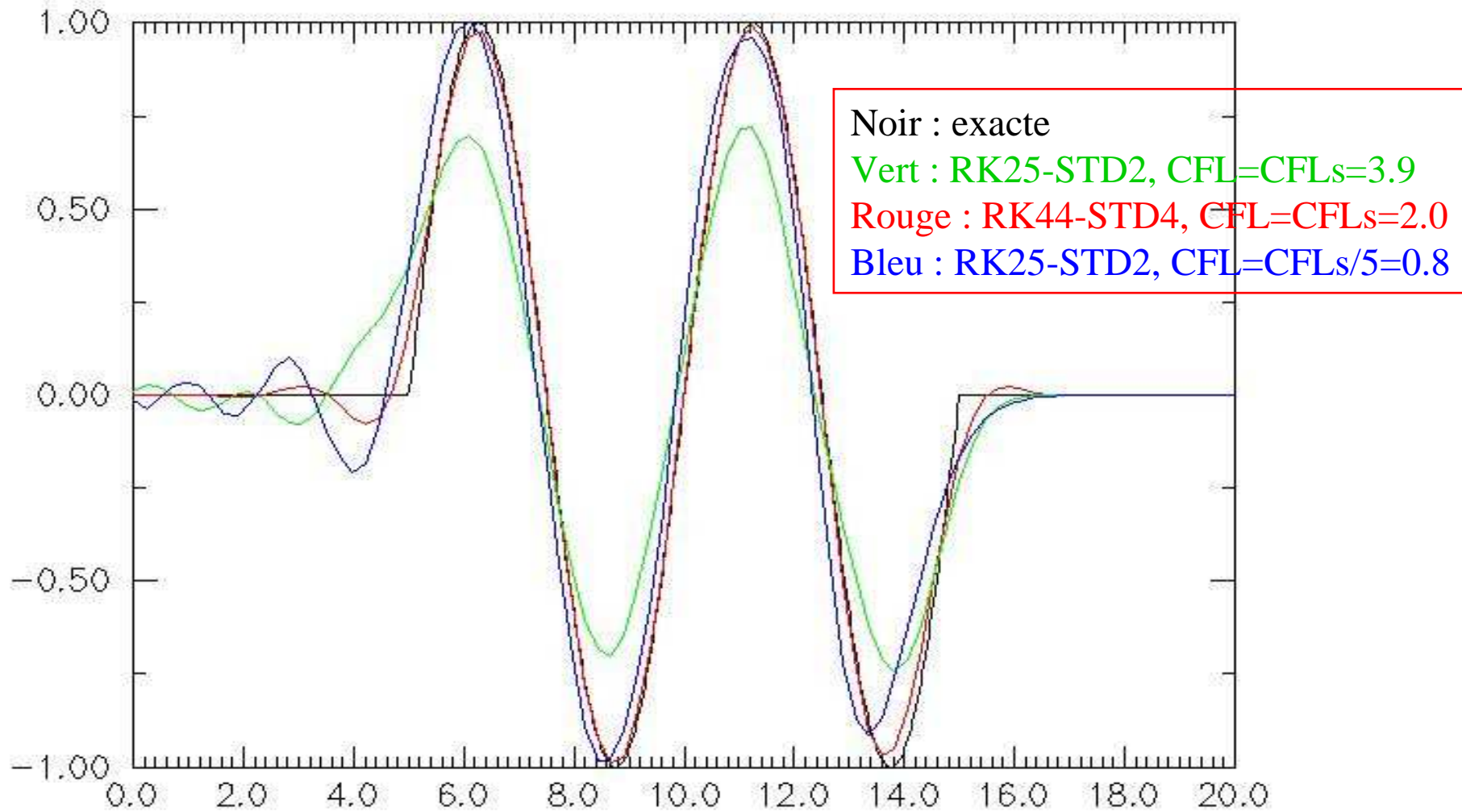
# Dispersion : RK25-STD2+Diss O4



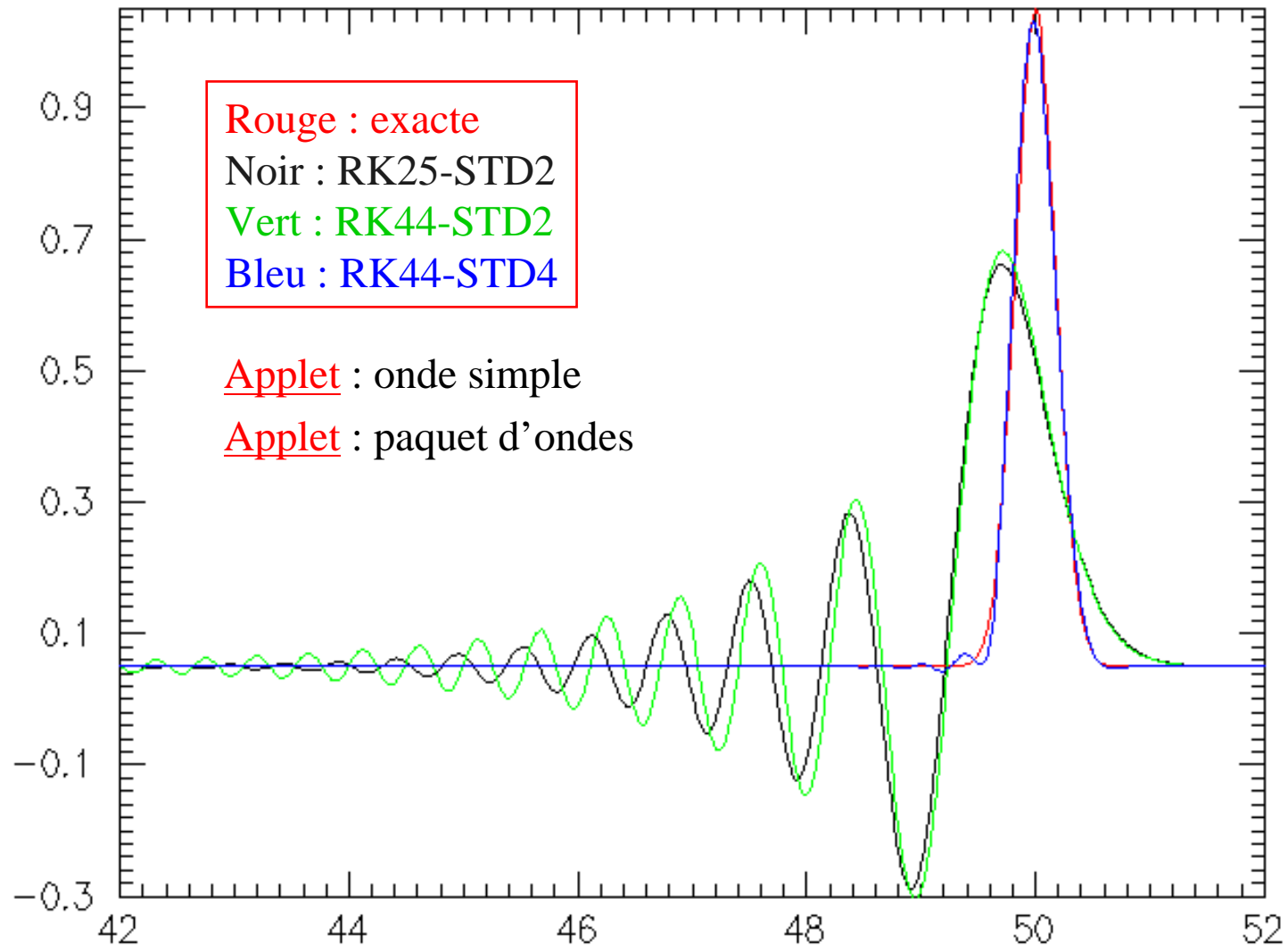
## Dissipation : RK25-STD2+Diss O4



## Dissipation & dispersion : sinus



## Dissipation & dispersion : gaussienne



## Remarques

---

- Un schéma numérique de **dissipation faible** est plus utile qu'un schéma d'ordre élevé (calcul instationnaire, LES)
- Le CFL de stabilité n'est pas toujours le meilleur choix pour limiter la dissipation d'un schéma numérique.
- Les études de dissipation/dispersion permettent de juger de l'intérêt des couples de schémas (spatial+temporel). Exemple : le couple RK44-STD2 n'apporte rien par rapport à RK25-STD2 car c'est ici le schéma spatial qui génère le plus d'erreurs.
- Le couple RK44-STD4 apporte un gain très net comparé au couple RK25-STD2 mais avec un coût CPU supplémentaire et une difficulté accrue pour imposer les cal en gardant la convergence globale d'ordre 4 (cal d'ordre 3)

# Schémas codes commerciaux

---

- Ordre 1 ou 2 en temps et en espace
  - $\Delta t, \Delta x$  : **dissipatif** donc **robuste** mais peu précis (atténuation des gradients, dissipation des ondes)
  - $\Delta t^2, \Delta x^2$  : moins dissipatif donc moins robuste et plus précis
- Espace : Upwind ou centré + dissipation
- Temps : Runge-Kutta explicite ou implicite
- Techniques d'accélération de convergence
  - pas de temps local
  - multigrille

# Schémas Fluent

---

- Segregated (Fluent/UNS) – code incompressible
  - **Spatial** :
    - Pressure : standard, 2nd order, body-force weighted, Presto
    - Pressure-Velocity coupling : Simple, SimpleC, PISO
    - Avec sous-relaxation et multi-grilles
  - **Temporel** uniquement solveur instationnaire :
    - Euler ordre 1 :  $(u^{n+1} - u^n)/\Delta t = f(u)$ 
      - Explicite  $f(u^n)$
      - Implicite  $f(u^{n+1})$
    - Décentré amont ordre 2 :  $(3 u^{n+1} - 4 u^n + u^{n-1})/(2\Delta t) = f(u)$ 
      - Explicite  $f(u^n)$
      - Implicite  $f(u^{n+1})$

# Schémas Fluent

---

- Coupled (RAMPANT) – code compressible
  - Spatial :
    - 1st order upwind, 1st order Power-law
    - 2nd order upwind, 2nd order Quick scheme
    - 2nd order centered : LES model
  - Temporel :
    - Steady flows :
      - Explicit RK25 : CFLs = 2.5, CFL conseillé < 2, CFL = 1 par défaut, IRS en option
      - Implicit Euler : CFLs =  $+\infty$ , CFL possible 10, 20, 100, CFL = 5 par défaut
      - Avec multi-grilles (plusieurs possibilités)
    - Unsteady flows :
      - Explicit RK25 scheme : CFLs = 2.5, CFL conseillé < 2, CFL = 1 par défaut
      - Dual-time stepping : ?...



# Schémas Fluent : quel choix ?

---

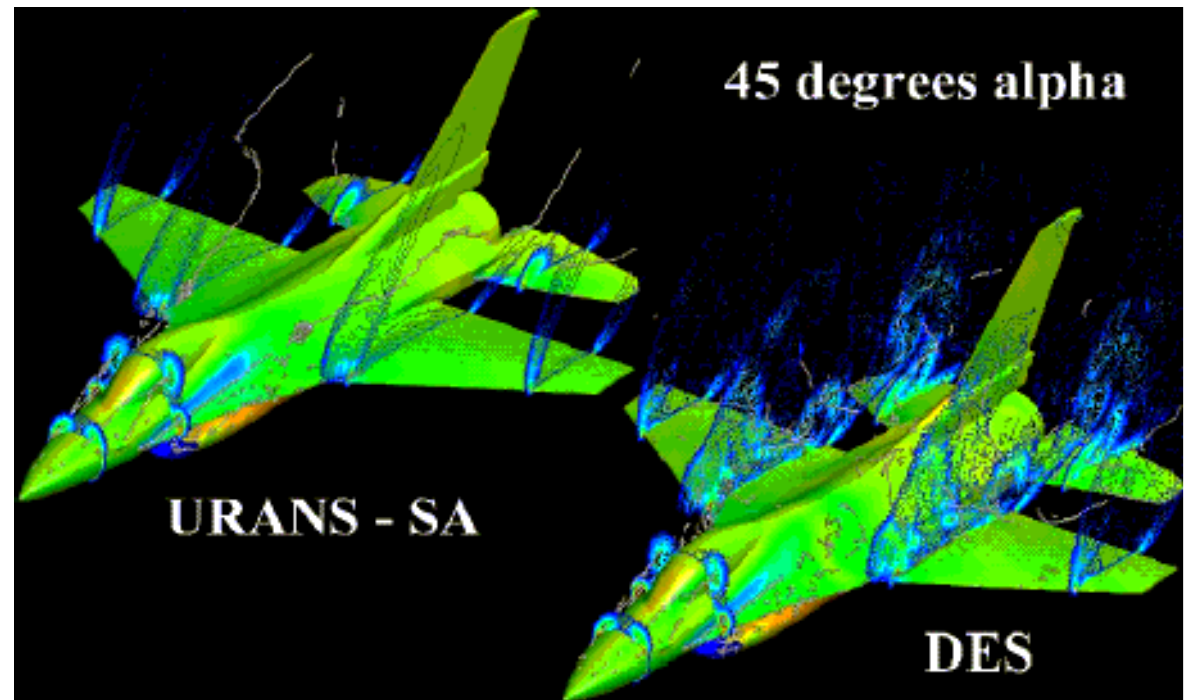
- Extraits documentation « schémas » :
  - « Ordre 1 acceptable si écoulement aligné avec les lignes de maillage »
  - **Remarque** : Ordre 1 choisi par défaut (robustesse lors des transitoires initiaux)
  - « Quick scheme meilleur pour les écoulements tournants »
  - « IRS : a smoothing factor of 0.5 with 2 passes is usually adequate to allow the CFL to be doubled »
  - Etc, etc... (110 pages de règles et d'exceptions !!!)
- **Pas de choix universel => une expertise nécessaire**
- Règle de bonne conduite :
  - Commencer avec les schémas d'ordre 1 (par défaut)
  - **Finir avec les schémas d'ordre 2** avant de raffiner le maillage si besoin de plus de précision

## Codes de demain ?

---

- Avion militaire à grande incidence
- Bruit aérodynamique des moteurs
- ...

- Transition
- Décollement
- Turbulent instationnaire
- Sources de bruit



# Code de demain ?

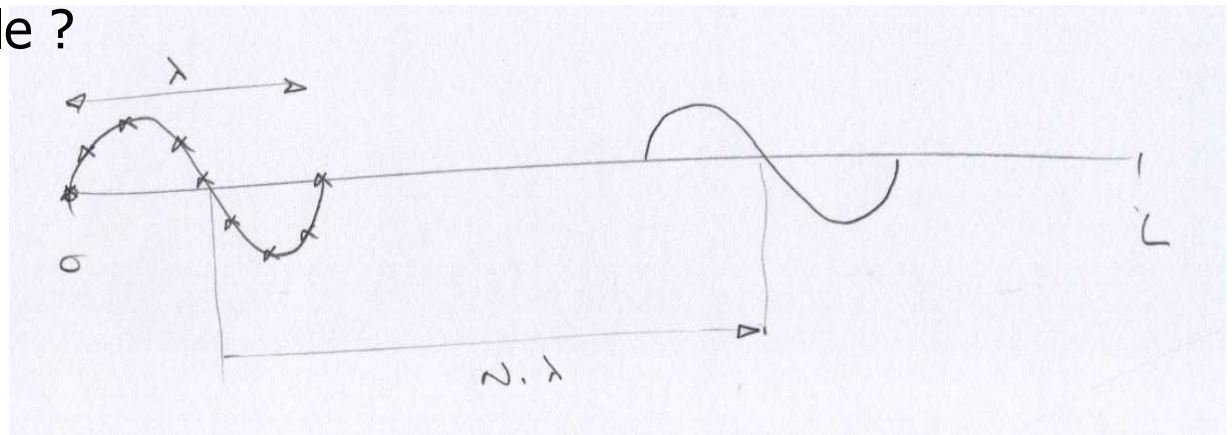
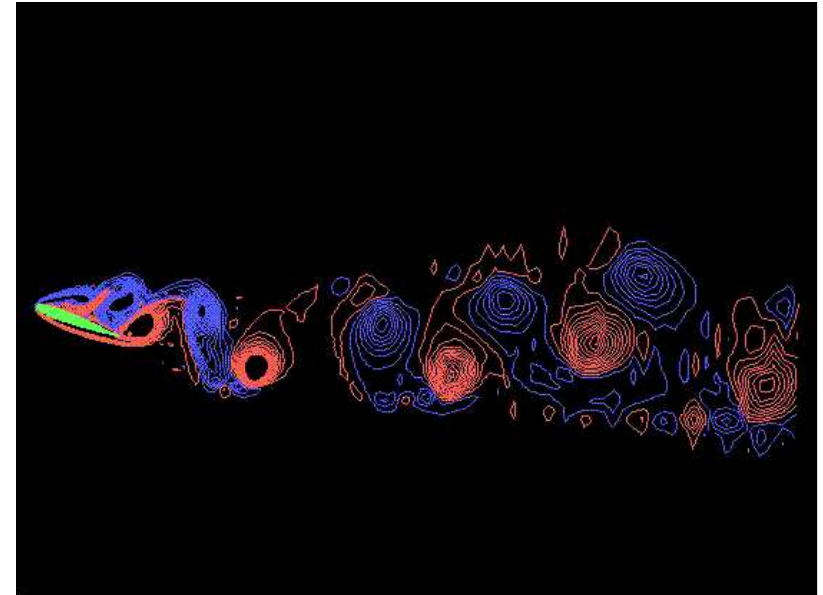
- Pour prédire le bruit aérodynamique d'un avion en configuration décollage



- Taille de la plus petite structure cohérente (CS) à capturer ?
- Distance de convection de CS nécessaire avant dissipation et dispersion ?

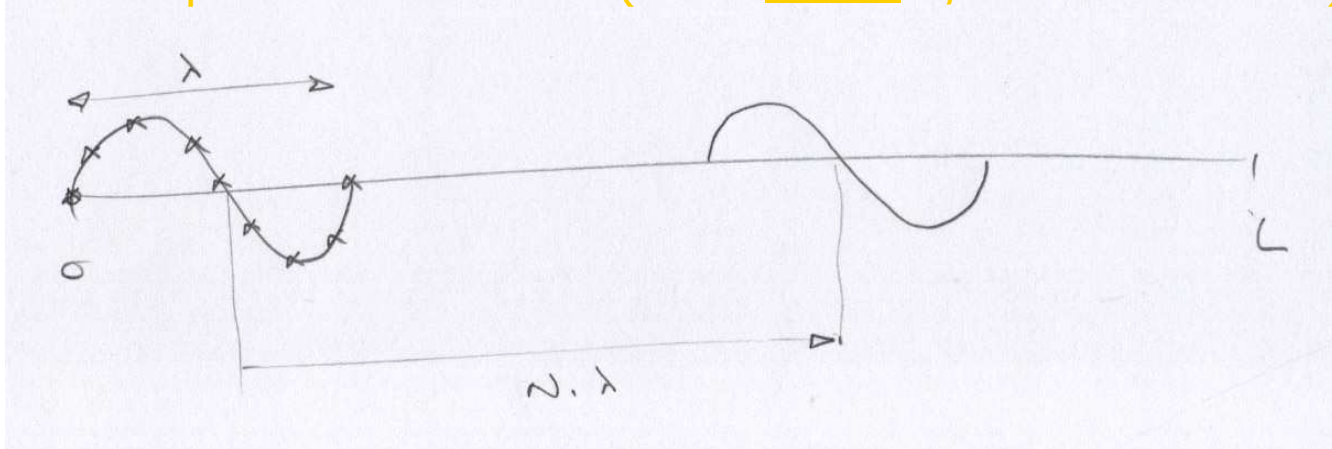


- Quel schéma ?
- Quelle finesse de maille ?
- Quel pas de temps ?

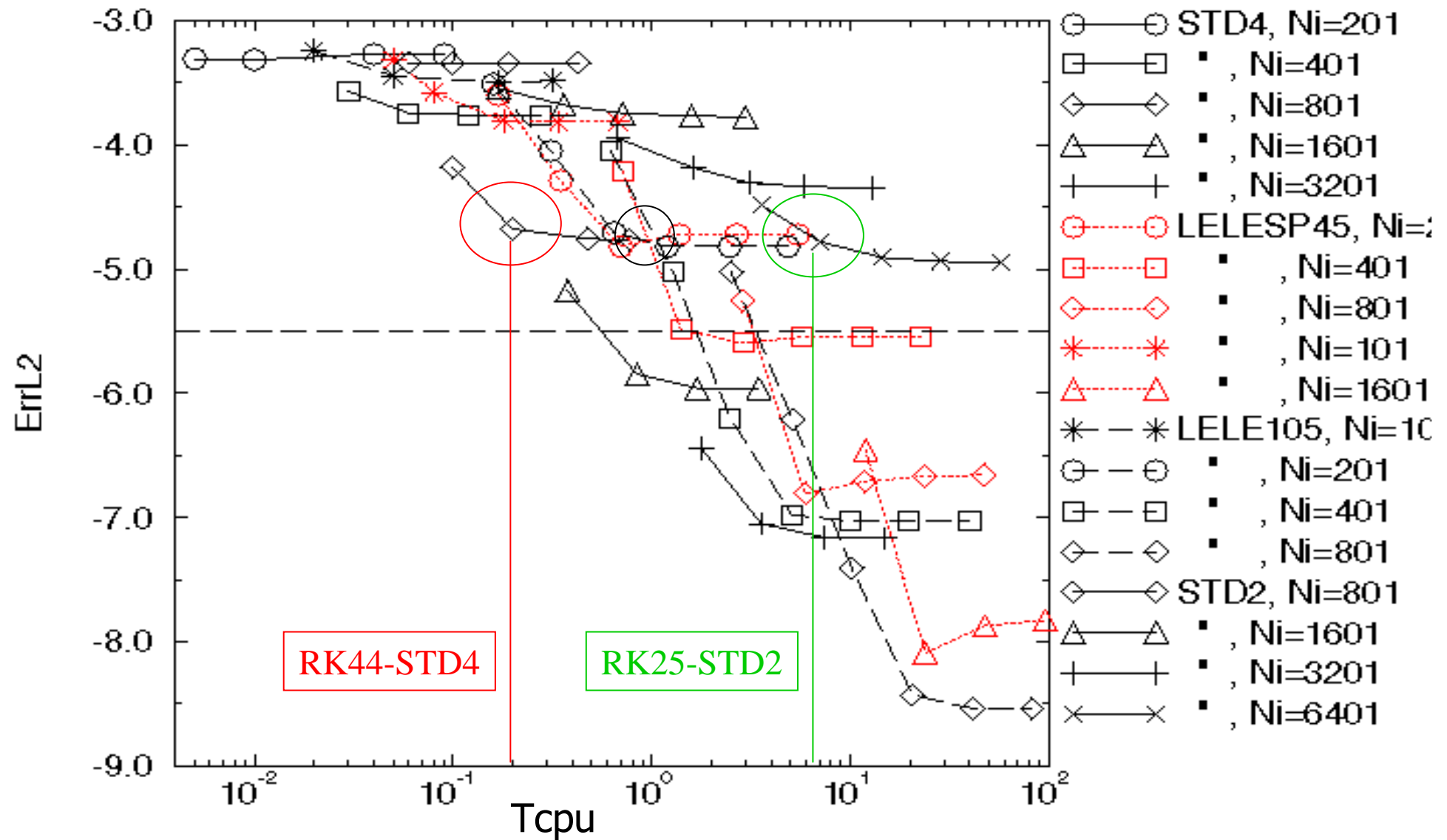


# Evaluation de schémas d'ordre élevé

- $N_i = N \cdot PPW$
  - $T = N \cdot \lambda / c = N_{it} \cdot \Delta t = N_{it} \cdot \sigma \Delta x / c = N_{it} \cdot \sigma / c \cdot \lambda / PPW$
  - Soit  $N_{it} = N \cdot PPW / \sigma$
  - $T_{cpu} = N_{it} \cdot T_i = N_{it} \cdot (Nops + Nopt) / Flops \cdot N \cdot PPW$
  - Soit  $T_{cpu} = [N^2] \cdot [(Nops + Nopt) PPW^2 / \sigma] \cdot [1/Flops]$
- Terme 1 : dépend du problème physique
  - Terme 2 : dépend du couple schémas spatial et temporel
  - Terme 3 : dépend de la machine (loi de moore : /10 tous les 6 ans)

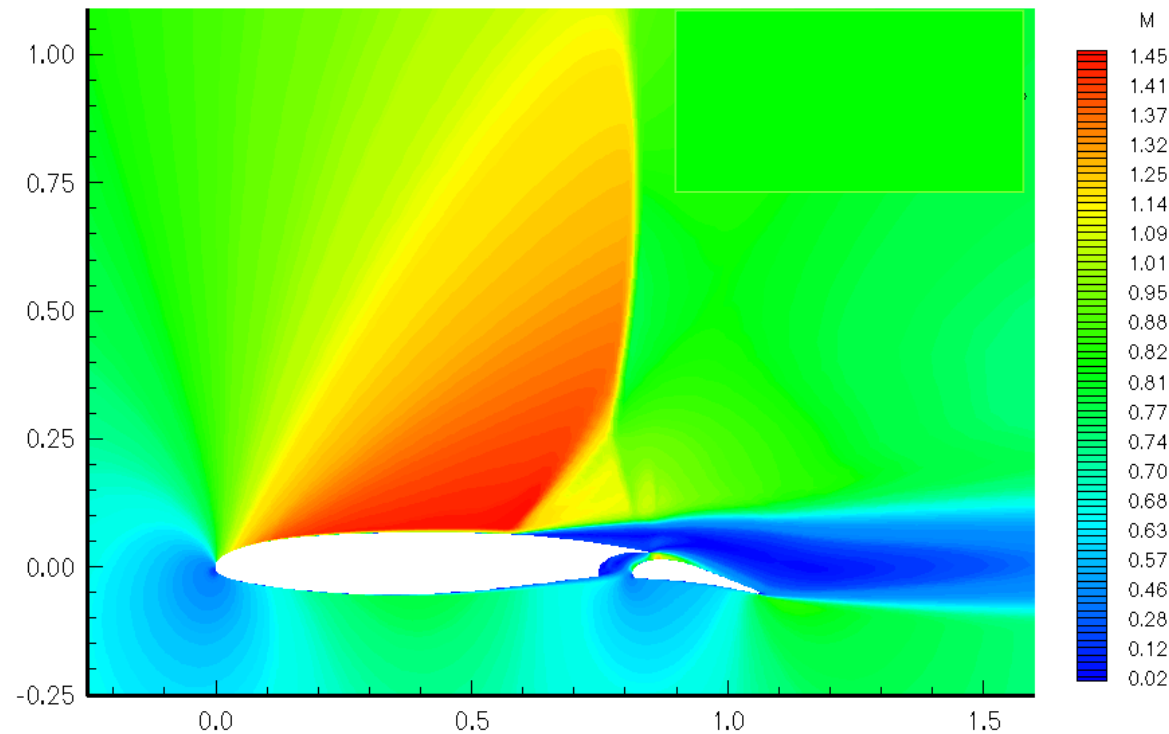


## Schéma optimal



## Evaluation de schémas d'ordre élevé

- Exemple calcul stationnaire : Prédiction de la portance et de la trainée sur un profil d'aile 2D à incidence modérée  $\alpha = 6^\circ$  à  $Re = 3\,000\,000$  :



# Evaluation de schémas d'ordre élevé

---

- Exemple calcul stationnaire : Prédiction de la portance et de la trainée sur un profil d'aile 2D à incidence modérée  $\alpha = 6^\circ$  à  $Re = 3\,000\,000$  :
  - Modèle continu : RANS+Spalart-Allmaras
  - Modèle discret : ordre 4 (flux), dissipation d'ordre 3
  - Précision des résultats actuels : 1%  $C_l$ , 2-3%  $C_d$
  - Temps de calcul : 24h / PC 1GHz
  - Maillage nécessaire : 200 000 pts en 2D
  - Précision nécessaire dans une méthode de conception ?

# Evaluation de schémas d'ordre élevé

---

Zingg 2000 :

RANS thin-layer/Spalart-Allmaras,

Comparaison de schémas : ordre 2 / ordre 4-3

Grid	Dimensions	Points on Airfoil	Off-Wall Spacing ( $\times 10^{-6}$ )	Leading Edge Clustering ( $\times 10^{-3}$ )	Trailing Edge Clustering ( $\times 10^{-3}$ )
A	$1057 \times 193$	801	0.23	0.1	0.5
B	$529 \times 97$	401	0.53	0.2	1.0
C	$265 \times 49$	201	1.2	0.4	2.0

Table 1 Grids for subsonic cases.



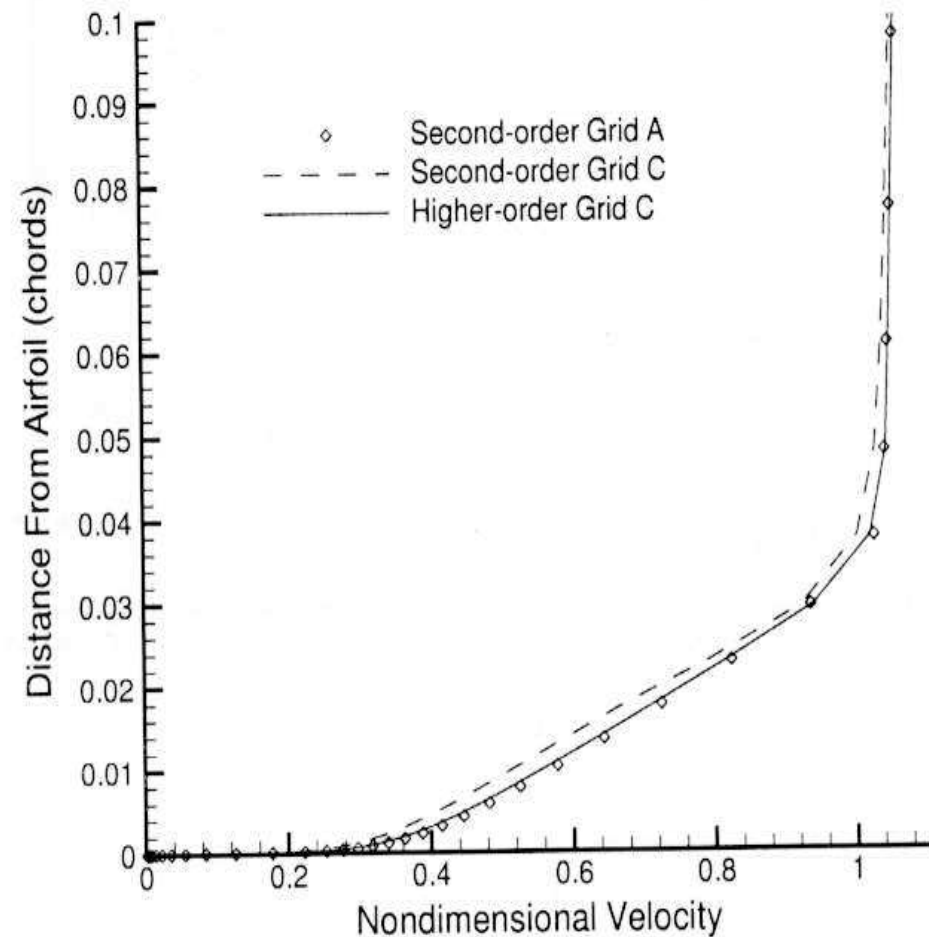
# Evaluation de schémas d'ordre élevé

Zingg 2000 :

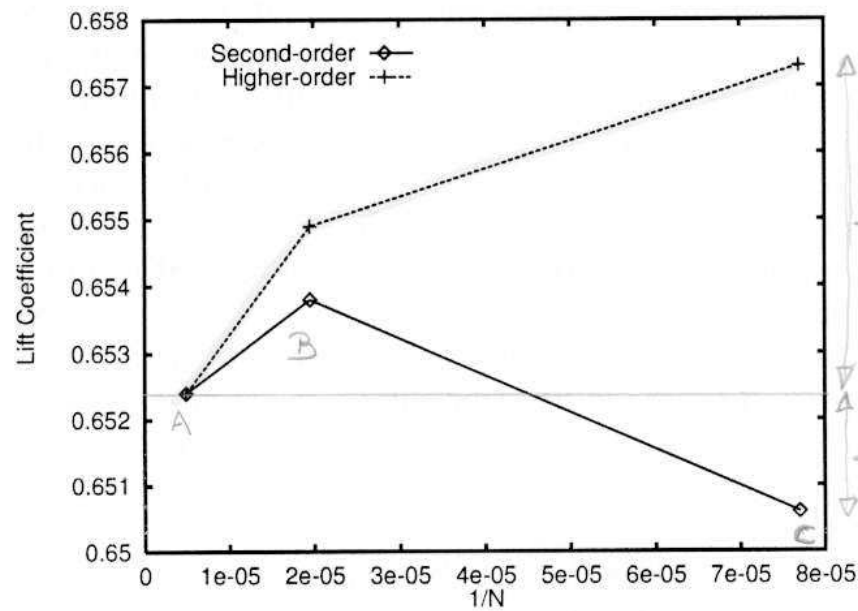
RANS thin-layer/Spalart-Allmaras,

## Comparaison de schémas

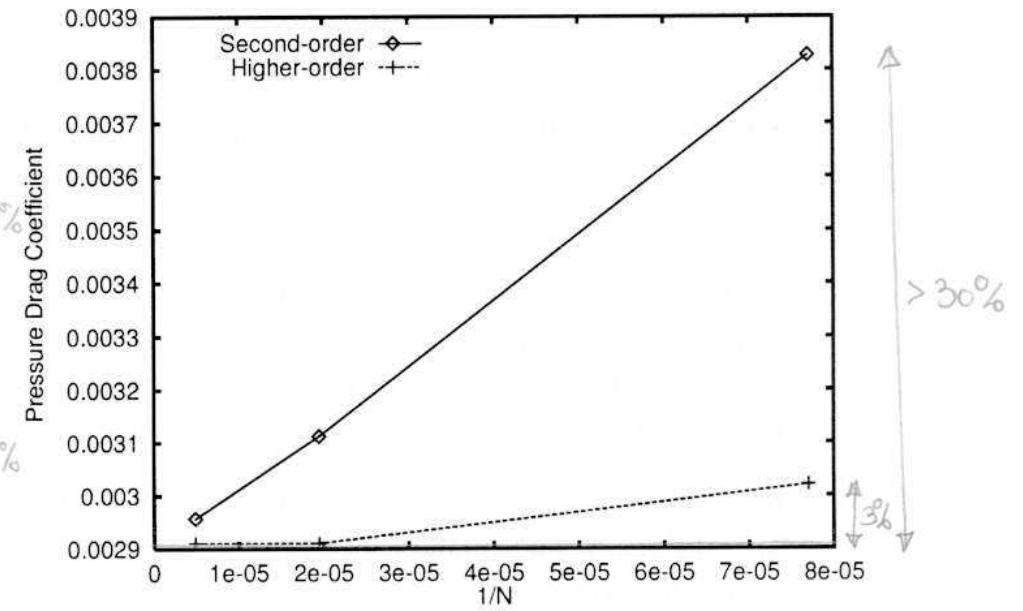
- Ordre 2
- Ordre élevé (4-3)



# Evaluation de schémas d'ordre élevé



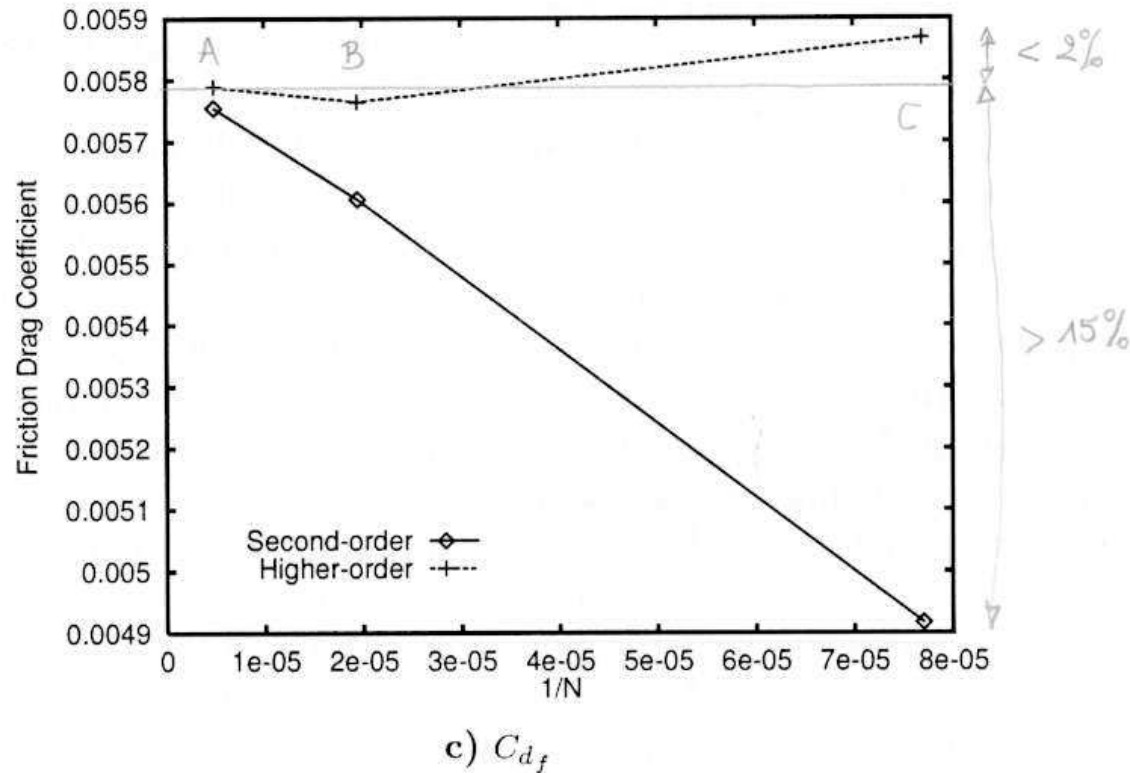
a)  $C_l$



b)  $C_{dp}$

Zingg 2000

# Evaluation de schémas d'ordre élevé



**Prédiction de trainée : 16 fois moins de points de maillage**  
pour une précision équivalente avec le code d'ordre élevé !

Zingg 2000

## Intérêt des schémas d'ordre élevé

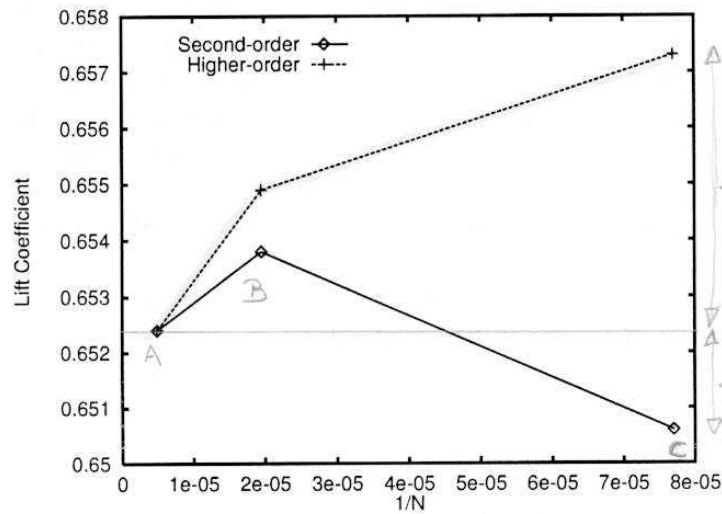
---

- **Réduction des coûts** de calculs à précision fixée (avec un compromis coût/précision à choisir)
- Solutions numériques **plus précises** (aéroacoustique, écoulements instationnaires, turbulents, géométries complexes).
- **Développements en cours** notamment dans le domaine de **l'aéroacoustique**
- Les **conditions aux limites** d'ordre élevées restent un problème difficile en géométries complexes

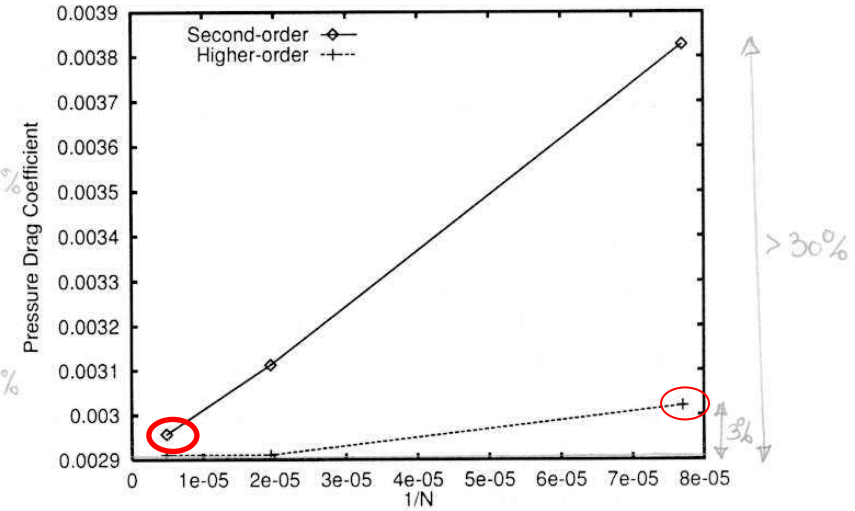




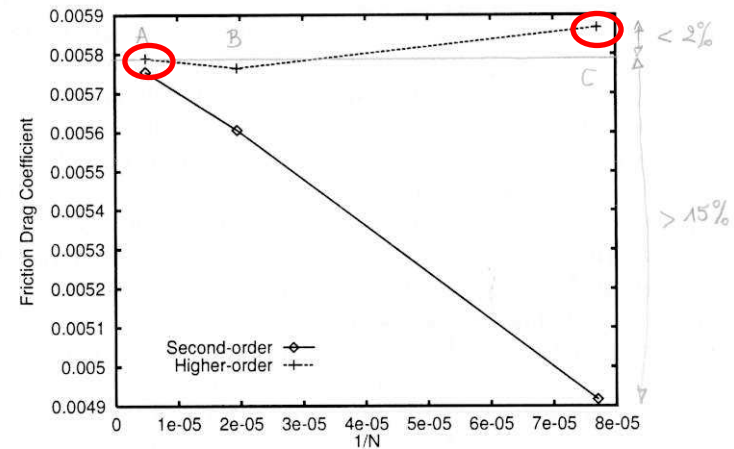
# Evaluation de schémas d'ordre élevé



a)  $C_l$



**Prédiction de trainée : 16 fois moins de points de maillage pour une précision équivalente avec le code d'ordre élevé !**



c)  $C_{d_f}$

Zingg 2000